풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 4

순수수학 • 쌍곡선 함수

STEP II 견본 문제지, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s2-q4

핵심 아이디어

이 항등식들은 모두 하나의 각(또는 하나의 쌍곡선(hyperbolic) "각")에 관한 명제이다. 우변에 이름을 붙이고, 그것의 한 함수를 읽어 낸 다음, 피타고라스 항등식(Pythagorean identities) $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$와 $1+\sinh^2 u=\cosh^2 u$를 이용해 나머지 함수를 구하면 된다. 정말로 주의해야 할 것은 제곱근의 부호뿐이다. 바로 여기에서 주값(principal value)의 범위가 중요해지고, 마지막 부분에서는 항등식이 더 이상 성립하지 않는 지점이 드러난다.

풀이

소문항 (i)

$\theta=\tan^{-1}(\sinh x)$라 하자. 그러면 $\tan\theta=\sinh x$이고, θ는 주값이므로 $-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$이다. 따라서

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\sinh^2 x=\cosh^2 x.$$

$(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$에서 $\cos\theta>0$이므로 $\sec\theta>0$이고, $\cosh x>0$은 항상 성립한다. 양의 제곱근을 취하면 $\sec\theta=\cosh x$이고, 따라서

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\tanh x.$$

θ는 $\sin^{-1}$의 주값의 범위인 $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$에 있으므로, 이는 정확히 $\theta=\sin^{-1}(\tanh x)$임을 뜻한다. 그러므로 모든 실수 x에 대하여 $\sin^{-1}(\tanh x)=\tan^{-1}(\sinh x)$가 성립하며, 이것이 증명하려던 것이다.

? **생각해 보기** 왜 $\sin\theta=\tanh x$에서 논증이 이미 끝나는 것이 아닐까?

$\sin\theta = \tanh x$를 만족하는 해 θ는 무수히 많기 때문이다. 우리의 θ가 sin이 일대일(one-to-one)인 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$에 있기 때문에 비로소 θ가 주값 $\sin^{-1}(\tanh x)$ 임을 결론지을 수 있다. 같은 범위가 $\sec\theta$의 부호도 정해 주었다.

소문항 (ii)

$u = \sinh^{-1}(\tan y)$라 하자. $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$에서 $\tan y$는 유한하므로 이 값은 정의된다. 그러면 $\sinh u = \tan y$이고, (i)에 $x = u$를 대입하면

$$\sin^{-1}(\tanh u) = \tan^{-1}(\sinh u) = \tan^{-1}(\tan y) = y,$$

이다. 여기서 마지막 단계는 $\tan^{-1}$의 주값의 범위인 $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$를 이용한 것이다. 양변에 sin을 취하면 $\tanh u = \sin y$이다. 이 구간에서 $|\sin y| < 1$이므로 $\tanh^{-1}(\sin y)$가 정의되고, tanh는 일대일이므로 $u = \tanh^{-1}(\sin y)$이다. 즉,

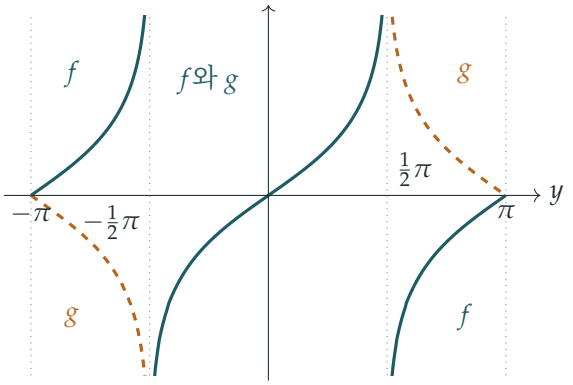
$$\sinh^{-1}(\tan y) = \tanh^{-1}(\sin y) \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi\right).$$

(직접 보이면: $\cosh u = \sqrt{1+\tan^2 y} = \sec y$이고, $\cos y > 0$이므로 이 값은 양수이다. 따라서 $\tanh u = \tan y \cos y = \sin y$이다.)

그래프의 개형 $f(y) = \sinh^{-1}(\tan y)$, $g(y) = \tanh^{-1}(\sin y)$라 하자. 두 함수 모두 $y = \pm\frac{1}{2}\pi$에서 정의되지 않는데, 이 점에서 $\tan y$는 무한대이고 $\sin y = \pm 1$이기 때문이다. 나머지 점에서의 성질은 tan과 sin의 대칭성으로부터 나온다.

- 두 함수는 모두 기함수(odd function)이고, $y = 0$과 $y = \pm\pi$에서 값이 0이다.
- tan의 주기(period)가 π이므로 f의 주기도 같다. 따라서 $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$에서는 $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$에서의 값을 그대로 반복한다. 즉 $-\infty$에서 0까지 증가한다.
- $\sin(\pi - y) = \sin y$이므로 g는 $y = \frac{1}{2}\pi$에 대하여 대칭이다. $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$에서는 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서의 값을 거울에 비친 모양으로 반복한다. 즉 $+\infty$에서 0까지 감소한다.
- 미분하면 $f'(y) = \dfrac{\sec^2 y}{\sqrt{1+\tan^2 y}} = |\sec y|$이고 $g'(y) = \dfrac{\cos y}{1-\sin^2 y} = \sec y$이다. 따라서 f는 정의된 모든 구간에서 증가하는 반면, g는 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 증가하고 그 바깥에서는 감소한다. 두 함수 모두 원점에서 기울기가 1이다. $y = \pi$에서 f의 기울기는 1이고 g의 기울기는 -1이다.

$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 두 그래프는 같은 곡선이고, 바깥쪽 구간에서는 각 그래프가 다른 그래프를 가로축에 대하여 대칭이동한 것이다.



실선: $f(y) = \sinh^{-1}(\tan y)$. 파선: $g(y) = \tanh^{-1}(\sin y)$ 중 f와 다른 부분. 점선 $y = \pm\frac{1}{2}\pi$는 점근선(asymptote)이다.

$\frac{1}{2}\pi < y < \pi$에서의 관계 개형을 보면 이 구간에서 $f = -g$일 것으로 보이며, 실제로 이를 증명할 수 있다. $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$이면 $y - \pi$는 $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$에 있으므로, 방금 증명한 항등식을 $y - \pi$에 적용할 수 있다:

$$\begin{aligned}\sinh^{-1}(\tan y) &= \sinh^{-1}\big(\tan(y-\pi)\big)\\ &= \tanh^{-1}\big(\sin(y-\pi)\big)\\ &= \tanh^{-1}(-\sin y) = -\tanh^{-1}(\sin y),\end{aligned}$$

여기서 $\tan(y-\pi) = \tan y$, $\sin(y-\pi) = -\sin y$와 $\tanh^{-1}$이 기함수라는 사실을 이용하였다. 따라서 $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$에 대하여

$$\sinh^{-1}(\tan y) = -\tanh^{-1}(\sin y).$$

(기함수라는 성질에 의해 $-\pi < y < -\frac{1}{2}\pi$에서도 같은 관계가 성립한다.)

> ? **생각해 보기** $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$일 때 (ii)의 논증은 어디에서 무너지는가?

$\tan^{-1}(\tan y) = y$인 단계에서이다. $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 바깥의 y에 대해서는 주값이 y가 아니라 $y - \pi$이다. 같은 말이지만, 직접 논증에서는 그 구간에서 $\cos y < 0$이므로 $\sqrt{1+\tan^2 y} = |\sec y| = -\sec y$이고, 이 음의 부호가 바로 답에 나타나는 부호이다.

검산

▶ $y = 1$에서: $\sinh^{-1}(\tan 1) = \tanh^{-1}(\sin 1) \approx 1.2262$. $y = 2$에서: $\sinh^{-1}(\tan 2) \approx -1.5235$인 반면 $\tanh^{-1}(\sin 2) \approx 1.5235$이므로, 부호가 바뀜을 확인할 수 있다.

- 부호: $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$에서 $\tan y < 0$이지만 $\sin y > 0$이므로, 두 식은 부호가 반대여야 하며 같을 수 없다.
- 큰 x에서의 (i): 양변 모두 $\frac{1}{2}\pi$에 수렴하며, 당연히 그래야 한다.

두 항등식을 10^5개의 무작위 점에서, 그리고 관계 $f = -g$를 $\frac{1}{2}\pi < |y| < \pi$에서 수치적으로 검증하였다.

흔한 실수

- $\sqrt{1+\tan^2 y} = \sec y$라고 쓰면서 $\sec y$의 부호를 확인하지 않는 것. 이것이 바로 마지막 부분의 핵심이다.
- $\sin\theta = \tanh x$로부터 $\theta = \sin^{-1}(\tanh x)$라고 결론지으면서 θ가 왜 주값인지 설명하지 않는 것.
- g를 $\frac{1}{2}\pi$ 너머에서 f와 같은 모양으로 그리는 것: g는 tan의 주기성이 아니라 $\frac{1}{2}\pi$에 대한 sin의 대칭성을 물려받는다.

STEP 너머

함수 $\mathrm{gd}(x) = \tan^{-1}(\sinh x) = \sin^{-1}(\tanh x)$를 **구더만 함수**(Gudermannian function)라 한다. 이 함수는 복소수 없이 원함수와 쌍곡선함수를 연결하며, (ii)는 그 역함수가 $\sinh^{-1}(\tan y)$임을 보여 준다. 이 함수는 메르카토르 도법(Mercator map projection)에 등장하는데, 여기서 지도의 세로 좌표를 위도로 바꾸어 준다. 이 문제에서 항등식을 무너뜨린 역함수와 그 분지(branch)는 복소수 z에 대한 $\log z$와 $z^{1/2}$를 공부할 때 핵심 주제가 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*는 이를 살펴보기에 아름다운 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.