풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 3

순수수학 • 드무아브르 정리

> **STEP II 견본 문제지, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q3

핵심 아이디어

드무아브르 정리(de Moivre's theorem)는 자연스럽게 귀납법(induction)으로 증명된다. 덧셈정리(compound-angle formulae)에 의해 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$를 한 번 더 곱할 때마다 각에 θ가 더해지기 때문이다. 방정식에서는 x^k 옆에 $\cos ky$, $\sin ky$가 놓인 모양이 "실수부와 허수부"를 강하게 암시한다. 첫 번째 방정식을 $z = x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$에 대한 하나의 복소수 방정식의 실수부(real part)로, 두 번째 방정식을 허수부(imaginary part)로 보면, 두 방정식은 쉽게 찾을 수 있는 근을 가진 z에 대한 삼차방정식(cubic) 하나로 합쳐진다.

풀이

드무아브르 정리

n에 대한 귀납법을 쓴다. $n = 1$일 때 양변은 모두 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$이므로 결과가 성립한다.

어떤 $n = k \geq 1$에 대하여 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{k+1} &= (\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta)(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ &= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + \mathrm{i}(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta) \\ &= \cos(k+1)\theta + \mathrm{i}\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

이다. 여기서 첫째 줄에서는 귀납 가정(induction hypothesis)을, 둘째 줄에서는 $\mathrm{i}^2 = -1$을, 셋째 줄에서는 $\cos(A+B)$와 $\sin(A+B)$의 덧셈정리를 이용하였다. 따라서 $n = k+1$일 때도 결과가 성립하고, 귀납법에 의해 모든 양의 정수 n에 대하여 성립한다.

방정식 풀기

x와 y를 실수라 하고

$$z = x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

로 놓자. 드무아브르 정리에 의해 $n = 1, 2, 3$에 대하여

$$z^n = x^n(\cos y + \mathrm{i}\sin y)^n = x^n \cos ny + \mathrm{i}\, x^n \sin ny.$$

이다. (이는 x의 부호와 관계없이 성립한다. 실수 인수 x는 그냥 x^n으로 나올 뿐이다.) x와 y가 실수이므로 두 방정식의 좌변은 정확히 $z^3 + 2z^2 + 2z$의 실수부와 허수부이다. 따라서 두 실수 방정식은 하나의 복소수 방정식

$$z^3 + 2z^2 + 2z = -1, \qquad \text{즉,} \qquad z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0.$$

과 동치이다.

? 생각해 보기 왜 하나의 복소수 방정식이 두 실수 방정식과 같은가?

두 복소수는 실수부끼리 같고 허수부끼리 같을 때, 그리고 그때에만 같다. 우변 -1의 실수부는 -1, 허수부는 0이며, 이것이 바로 주어진 두 방정식의 우변이다. 따라서 (x, y)가 두 실수 방정식을 모두 만족하는 것은 z가 삼차방정식을 만족하는 것과 동치이다.

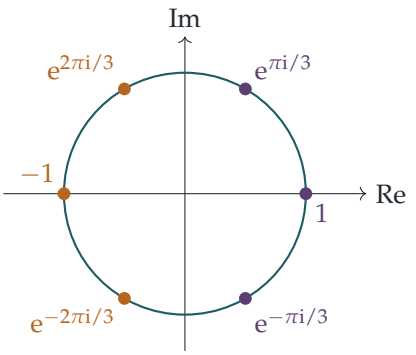
이제 $-1 + 2 - 2 + 1 = 0$이므로 $z = -1$은 근(root)이고, 이 인수로 나누면

$$z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = (z + 1)(z^2 + z + 1).$$

을 얻는다. 이차식의 근은 $z = \frac{1}{2}(-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})$이다. 따라서 세 근은

$$z = -1 = \cos \pi + \mathrm{i}\sin \pi, \qquad z = \cos \tfrac{2\pi}{3} \pm \mathrm{i}\sin \tfrac{2\pi}{3},$$

이며, 모두 단위원(unit circle) 위에 있다.



이제 각 근을 다시 실수 순서쌍 (x, y)로 바꾸는 일이 남았다. $|z| = |x|$이므로 모든 해는 $|x| = 1$을 만족한다. 특히 $x = 0$은 불가능하다($0 = -1$이 되기 때문이다).

- $x = 1$이면 $\cos y + \mathrm{i}\sin y = z$이므로 y는 세 근 중 하나의 편각(argument)이다. 즉 $y = \pi$, $\frac{2\pi}{3}$ 또는 $-\frac{2\pi}{3}$에 2π의 임의의 배수를 더한 값이다.
- $x = -1$이면 $\cos y + \mathrm{i}\sin y = -z$이고, 이는 $1, \cos\frac{\pi}{3} \mp \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$ 중 하나이다(그림의 자주색 점). 따라서 $y = 0, -\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi}{3}$에 2π의 임의의 배수를 더한 값이다.

이들은 각각 삼차방정식의 근을 주므로 모두 해가 된다. k를 임의의 정수라 하면 해는

$$x = 1, \quad y = \pi + 2k\pi \text{ 또는 } y = \pm\tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi; \qquad x = -1, \quad y = 2k\pi \text{ 또는 } y = \pm\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

이다. $[0, 2\pi)$에서는 여섯 개의 순서쌍 $(1, \frac{2\pi}{3})$, $(1, \pi)$, $(1, \frac{4\pi}{3})$, $(-1, 0)$, $(-1, \frac{\pi}{3})$, $(-1, \frac{5\pi}{3})$이다.

검산

$x = -1, y = 0$을 넣어 보자. 첫 번째 방정식은 $-1 + 2 - 2 = -1$이 되고 두 번째는 $0 = 0$이다. $x = 1, y = \frac{2\pi}{3}$을 넣어 보자. 코사인 값은 $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$이므로 $1 - 1 - 1 = -1$이 되고, 사인 값은 $0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $0 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$이 된다. $x \in [-3, 3]$, $y \in [0, 2\pi)$의 촘촘한 격자에서 컴퓨터로 탐색하면 (반올림 오차 범위에서) 위의 여섯 점에서만 근사해가 나타나므로, 빠뜨린 해는 없다.

흔한 실수

- x를 절댓값(modulus)으로 보고 $x \geq 0$이라고 가정하는 것. 문제는 임의의 실수 x를 허용하며, $x = -1$인 해도 똑같이 유효하다. 이들은 같은 점 z를 y를 π만큼 옮겨서 나타낸 것이다.
- $+2k\pi$를 빠뜨리는 것. y는 2π를 법으로 해서만 결정되므로 순서쌍 (x, y)는 무수히 많다.

STEP 너머

두 실수 방정식을 하나의 복소수 방정식으로 묶는 것은 표준적인 기법이다. $z = re^{\mathrm{i}\theta}$에 대한 다항식의 실수부와 허수부는 바로 이런 종류의 삼각방정식 연립을 만족하며, 인수분해(factorisation) $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = (z + 1)(z^2 + z + 1)$는 근들을 단위원 위에 놓는다. 대학의 첫 강의에서는 $e^{\mathrm{i}\theta}$를 멱급수(power series)로 정의하게 되는데, 이렇게 하면 드무아브르 정리가 모든 정수에 대하여 성립하고 (분지(branches)에 주의한다면) 정수가 아닌 거듭제곱에도 의미를 부여할 수 있다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 모든 내용을 기하학적으로 아름답게 설명한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.