풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 2

순수수학 • 대칭 연립방정식

> **STEP II 견본 문제지, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q2

핵심 아이디어

세 방정식은 순환적(cyclic)이므로 두 개씩 짝지어 빼 보는 것이 자연스럽고, 각 차는 $x+y+z$를 공통인수(common factor)로 하여 인수분해(factorise)된다. 그다음에는 차의 제곱의 합이 두 가지로 쓸모가 있다. x, y, z로 나타내면 이 합은 $a+b+c$의 배수이고, 한편 첫 번째 결과를 이용하면 이 합을 $a-b, b-c, c-a$와 $x+y+z$로 나타낼 수 있다. $x+y+z$와 두 변수끼리의 차를 알고 나면 세 개의 일차방정식으로 풀이가 끝난다.

풀이

같은 비

첫 번째 방정식에서 두 번째 방정식을 빼면

$$\begin{aligned} a-b &= x^2-y^2-yz+zx \\ &= (x-y)(x+y)+z(x-y) \\ &= (x-y)(x+y+z). \end{aligned}$$

똑같은 방법으로(또는 $x \to y \to z \to x, a \to b \to c \to a$로 순환시켜)

$$b-c=(y-z)(x+y+z), \qquad c-a=(z-x)(x+y+z).$$

$S=x+y+z$라 하자. $a \neq b$이므로 곱 $(x-y)S$는 0이 아니고, 따라서 $S \neq 0$이다(마찬가지로 x, y, z는 서로 다르다). a, b, c가 서로 다르므로 $a-b, b-c, c-a$와 S로 나눌 수 있고, 그러면

$$\frac{y-z}{b-c}=\frac{z-x}{c-a}=\frac{x-y}{a-b}=\frac{1}{x+y+z}$$

이므로 증명이 끝난다.

$x+y+z$ 구하기

문제에서 제시한 합을 전개하면

$$\begin{aligned}(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2 &= 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\ &= 2[(x^2-yz)+(y^2-zx)+(z^2-xy)]\\ &= 2(a+b+c).\end{aligned}$$

한편 앞 부분에서 $y-z=(b-c)/S$ 등을 얻었으므로, 같은 합은

$$\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{S^2}=\frac{2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}{S^2}$$

과 같다. 두 식을 같다고 놓고 $2(a+b+c)$로 나누면(a, b, c가 양수이므로 이 값은 양수이다)

$$S^2=\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{a+b+c}.$$

따라서 $\triangle^2$이 이 값일 때 $x+y+z=\triangle$이므로 증명이 끝난다. 여기서 $\triangle^2>0$임에 주의하자. 분자가 $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$의 절반이고, 이는 서로 다른 a, b, c에 대하여 양수이기 때문이다. 그러므로 $\triangle=\pm\sqrt{\triangle^2}$의 두 가지 가능성이 있고, 지금까지의 논의로는 그 중 하나를 고를 수 없다.

방정식 풀기

이제 다음을 안다.

$$x+y+z=\triangle,\qquad x-y=\frac{a-b}{\triangle},\qquad x-z=\frac{a-c}{\triangle}.$$

세 식을 모두 더하면

$$3x=\triangle+\frac{2a-b-c}{\triangle}=\frac{\triangle^2+2a-b-c}{\triangle}.$$

이 식은 깔끔하게 정리된다. $s=a+b+c$, $Q=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$라 두면 $\triangle^2=Q/s$이다. 그러면

$$\begin{aligned}s(\triangle^2+2a-b-c) &= Q+(a+b+c)(2a-b-c)\\ &= (a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)+(2a^2+ab+ca-b^2-c^2-2bc)\\ &= 3(a^2-bc).\end{aligned}$$

그러므로 $x=\dfrac{a^2-bc}{s\triangle}$이고, y, z는 순환시켜 얻는다. 이제 잘 알려진 인수분해

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

에 의하여 $(s\triangle)^2 = sQ = a^3+b^3+c^3-3abc$이다. $K = \sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc} > 0$이라 쓰면 $s\triangle = \pm K$이고, 해는

$$(x,y,z) = \pm\frac{1}{K}(a^2-bc,\ b^2-ca,\ c^2-ab)$$

이다. 단, 부호는 모두 같은 것을 택한다.

> **생각해 보기** 우리는 해가 있다면 반드시 이 꼴이어야 한다는 것만 보였다. 이 둘이 정말로 해일까?

그렇다. 위의 논의는 모두 필요조건을 이어 간 것이었으므로, 원래 식에 다시 대입해 보아야 한다. 미지수의 제곱과 두 미지수의 곱만 나타나므로 전체 부호는 상관이 없고,

$$\begin{aligned}(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab) &= a^4-2a^2bc+b^2c^2-(b^2c^2-ab^3-ac^3+a^2bc)\\ &= a(a^3+b^3+c^3-3abc) = aK^2.\end{aligned}$$

K^2으로 나누면 $x^2-yz=a$를 얻고, 나머지 두 방정식은 순환시켜 얻는다. 따라서 해는 정확히 두 개이며, 하나는 다른 하나의 부호를 바꾼 것이다.

검산

- $a=1, b=2, c=3$으로 놓자. 그러면 $a^3+b^3+c^3-3abc = 18$, $K = 3\sqrt{2}$이고, 양의 부호를 택한 해는 $(x,y,z) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-5,1,7)$이다. 예를 들어 $x^2-yz = \frac{25-7}{18} = 1$이고, $x+y+z = \frac{1}{\sqrt{2}}$이며 그 제곱은 $\frac{1}{2} = \frac{14-11}{6} = \triangle^2$이다.
- 컴퓨터로 서로 다른 양수 a, b, c의 무작위 순서쌍 20,000개를 두 부호 모두에 대하여 시험하였다. 공식은 세 방정식과 같은 비 조건을 모두 만족하였고, 상대 오차는 10^{-11} 미만이었다.

흔한 실수

- $\triangle$에 대하여 양의 제곱근만 택하는 것. 문제의 $\triangle$는 $\triangle^2$을 통해서만 정의되며, 두 부호 모두 실제 해를 준다.
- $x+y+z$가 0이 아닌 이유를 밝히지 않고 이것으로 나누는 것. 여기서는 $a \neq b$로부터 이 사실이 나온다.

STEP 너머

항등식(identity) $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$는 행이 (a,b,c), (c,a,b), (b,c,a)인 순환행렬(circulant matrix)의 행렬식(determinant)이며, 복소

수(complex numbers) 범위에서는 $\omega = e^{2\pi i/3}$일 때 $(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$로 완전히 인수분해된다. 사실 사상 $(x,y,z) \mapsto (x^2-yz,\, y^2-zx,\, z^2-xy)$는 순환행렬의 수반행렬(adjugate)이며, 이것이 이 사상의 역을 그토록 쉽게 구할 수 있는 이유이다. 순환행렬과 그 고유벡터(eigenvector)는 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)을 처음 만나기에 좋은 부드러운 입구이다. 더 읽어 보려면 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.