풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 15

확률과 통계 • 기댓값과 표본평균

> **STEP II 견본 문제지, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q15

핵심 아이디어

왕은 매일 엄청나게 많은 상인에게 벌금을 물리므로, 대수의 법칙(law of large numbers)에 따라 상인 한 명당 하루 수입은 사실상 벌금의 **기댓값**(*expected value*)과 같다. 따라서 각 방식에서 벌금의 기댓값을 구해야 한다. 처음 두 방식은 정규분포(normal distribution)를 따르는 확률변수들의 표본평균(sample mean)에 관한 것인데, 이 표본평균의 분포도 정규분포이며 분산(variance)이 더 작다. 세 번째 방식은 대기 시간 문제이므로 기하분포(geometric distribution)를 써야 한다.

풀이

선택된 상자에 든 훈제 청어들의 무게(그램 단위)를 $W_1, W_2, \ldots$라 하자. 상자에는 훈제 청어가 사실상 무작위로 담겨 있으므로 W_i들은 서로 독립(independent)이고, 각각 $W_i \sim \mathrm{N}(200, 10^2)$이다. 상자에서 훈제 청어를 무작위로 고르는 일은 그 무게와 무관하므로, 어떤 훈제 청어를 어떤 순서로 꺼내든 여전히 서로 독립인 $\mathrm{N}(200, 10^2)$ 확률변수이다.

$W_1, \ldots, W_m$이 서로 독립이고 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$를 따르면 그 평균은

$$\overline{W} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} W_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{m}\right).$$

을 만족한다는 잘 알려진 사실을 이용한다.

소문항 (i)

여기서는 $m = 625$이므로 $\overline{W} \sim \mathrm{N}\left(200, \frac{100}{625}\right)$이고, 표준편차(standard deviation)는 $\frac{10}{25} = 0.4$이다. 그러면

$$\mathrm{P}(\overline{W} < 199) = \Phi\left(\frac{199 - 200}{0.4}\right) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) \approx 1 - 0.99379 = 0.00621.$$

이다. 벌금의 기댓값은

$$1500 \times 0.00621 \approx 9.3 \text{ 크라운.}$$

이다.

소문항 (ii)

이번에는 $m = 25$이므로 $\overline{W} \sim \mathrm{N}\left(200, \frac{100}{25}\right)$이고 표준편차는 2이다. 그러면

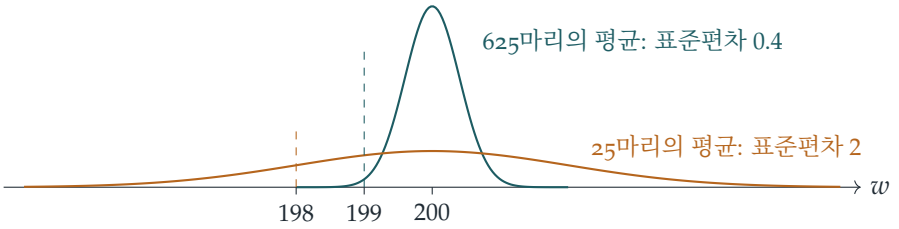
$$\mathrm{P}(\overline{W} < 198) = \Phi\left(\frac{198 - 200}{2}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.84134 = 0.15866,$$

이고, 벌금의 기댓값은

$$100 \times 0.15866 \approx 15.9 \text{ 크라운.}$$

이다.

아래 그림은 벌금이 더 작은 쪽이 이기는 이유를 보여 준다. 평균보다 1그램 낮은 기준선은 훈제 청어 625마리의 평균에 대해서는 표준편차의 2.5배만큼 떨어져 있지만, 평균보다 2그램 낮은 기준선은 25마리의 평균에 대해서는 표준편차 하나만큼밖에 떨어져 있지 않다.



소문항 (iii)

꺼낸 훈제 청어의 수를 N이라 하자. 200은 대칭인 분포의 평균이고 $\mathrm{P}(W = 200) = 0$이므로, 각 훈제 청어의 무게가 200 g보다 클 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 꺼내는 훈제 청어들은 서로 독립이므로, N은 성공 확률이 $\frac{1}{2}$인 독립 시행에서 첫 번째 성공까지(첫 번째 성공 포함)의 시행 횟수이다. 즉 N은 기하분포를 따른다.

$$\mathrm{P}(N = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(엄밀히 말하면 625마리를 꺼내면 상자가 비지만, 그중 어느 것도 200 g을 넘지 않을 확률은 2^{-625}로, 완전히 무시할 수 있다.)

> ? **생각해 보기** $\mathrm{E}[N^2]$를 먼저 계산하지 않고 $\mathrm{E}[N(N-1)]$을 어떻게 구할 수 있을까?

기하급수(geometric series)를 두 번 미분한다. $|x| < 1$일 때

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

이다. 양변에 x^2을 곱하고 $x = \frac{1}{2}$을 대입하면($n = 1$인 항은 어차피 0이다)

$$\mathrm{E}[N(N-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 4.$$

이다. (같은 방법으로, $p = \frac{1}{2}$일 때 $\mathrm{E}[N] = 2$, $\mathrm{Var}(N) = \frac{1-p}{p^2} = 2$이므로 $\mathrm{E}[N^2] = 6$이고 $\mathrm{E}[N^2] - \mathrm{E}[N] = 4$이다.) 따라서 벌금의 기댓값은

$$\mathrm{E}[3N(N-1)] = 3 \times 4 = 12 \text{ 크라운.}$$

이다.

결론

상인 한 명당 하루 벌금의 기댓값은 방식 (i), (ii), (iii)에 대해 각각 약 9.3, 15.9, 12크라운이다. 검사하는 상자의 수가 엄청나게 많으므로, 왕의 총수입은 검사 횟수에 벌금의 기댓값을 곱한 값에 매우 가깝다. 따라서 왕은 **방식 (ii)**를 택해야 한다. 이 방식은 방식 (i)보다 약 70%, 방식 (iii)보다 약 3분의 1만큼 더 많은 수입을 올린다.

검산

- 방식 (iii)은 표로 확인할 수는 없지만, 급수를 직접 더해 보기는 쉽다: $\frac{3\cdot 2}{4} + \frac{3\cdot 6}{8} + \frac{3\cdot 12}{16} + \cdots = 1.5 + 2.25 + 2.25 + 1.875 + \cdots$. 부분합(partial sum)이 12를 향해 빠르게 올라간다.
- 정규분포를 따르는 훈제 청어 625마리가 든 상자 10^5개를 세 방식 모두에 대해 모의실험한 결과, 평균 벌금은 약 10.2크라운(2×10^4개의 상자에서 얻은 값이라 오차가 크다), 15.9크라운, 11.9크라운이었다. 이는 9.31, 15.87, 12에 가깝다.

흔한 실수

- 표본평균의 표준편차로 $\frac{10}{625}$이나 $\frac{100}{25}$를 쓰는 것. m으로 나누어지는 것은 **분산**이므로, 표준편차는 $\sqrt{m}$으로 나누어진다.

- N이 0부터 시작한다고 보는 것(실패 횟수만 세는 것). 여기서 n은 무거운 훈제 청어까지 포함하므로 $\mathrm{P}(N = 1) = \frac{1}{2}$이고, 이때 벌금은 0이다.
- 벌금의 기댓값 대신 벌금을 물 확률을 비교하는 것. 방식 (iii)은 절반의 경우에 ($n \geq 2$일 때) 상인에게 벌금을 물리지만, 그 벌금은 대개 6크라운에 불과하다.

STEP 너머

"양이 엄청나게 많으므로 기댓값을 쓴다"는 정당화는 대수의 법칙이며, $\overline{W}$가 분산이 σ^2/m인 정규분포를 따른다는 사실은 중심극한정리(central limit theorem)와 연결된다. 중심극한정리에 따르면 개별 무게가 정규분포를 따르지 않더라도 이 사실은 근사적으로 성립한다. 신중한 왕이라면 흩어진 정도도 따져 볼 것이다. 드물게 큰 벌금을 물리는 방식 (i)은 분산이 단연 가장 크다. $\mathrm{E}[N(N-1)]$ 같은 계승 모멘트(factorial moment)를 급수를 미분하여 구하는 아이디어는 확률생성함수(probability generating function)로 이어지는데, 이는 대학 1학년 확률론의 핵심 도구이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 이 모든 내용을 명료하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.