풀이

# STEP II 견본 문제지, 문제 14

역학 • 강체의 회전

> **STEP II 견본 문제지, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q14

## 핵심 아이디어

원판과 입자는 모두 같은 고정된 연직축을 중심으로 회전하므로, 자연스러운 도구는 회전 운동 방정식, 즉 토크(torque) = 관성 모멘트(moment of inertia) × 각가속도(angular acceleration)를 각 물체에 따로 적용하는 것이다. 둘 사이의 마찰(friction)은 내력(internal force)의 쌍이다. 마찰은 한 물체를 (각운동량(angular momentum)의 관점에서) 늦추는 만큼 정확히 다른 물체를 빠르게 한다. 이로부터 보존되는 조합이 곧바로 나오고, 두 방정식을 빼면 **상대** 각속력에 대한 1계 미분방정식(first-order differential equation)을 얻는데, 이 상대 각속력은 지수적으로 감소한다.

## 풀이

### 모형

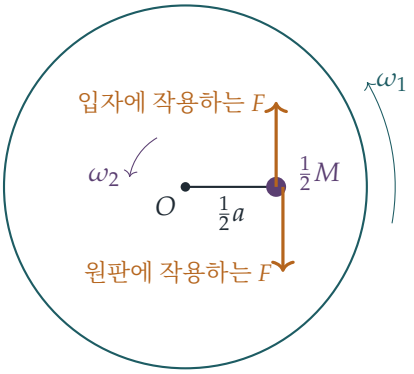
원판은 중심 $O$를 지나는 매끄러운 고정축을 중심으로 회전하는 균일한 박판(lamina)이므로, 축에 대한 관성 모멘트는

$$I_1 = \tfrac{1}{2}Ma^2.$$

이다. 질량이 $\frac{1}{2}M$인 입자는 가볍고 단단한 철사에 의해 축으로부터 일정한 거리 $\frac{1}{2}a$에 고정되어 있으므로, 반지름 $\frac{1}{2}a$인 원 위를 움직이고 축에 대한 관성 모멘트는

$$I_2 = \tfrac{1}{2}M\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = \tfrac{1}{8}Ma^2.$$

이다. 처음에 $\omega_1 = \Omega$이고 $\omega_2 = 0$이므로, 접촉점에서 원판이 입자보다 빠르게 움직인다. 따라서 마찰은 입자에 그 운동 방향으로 (반지름 $\frac{1}{2}a$인 곳에서 접선 방향으로) 작용하고, 뉴턴(Newton) 제3법칙(third law)에 의해 크기가 같고 방향이 반대인 힘이 같은 점에서 원판에 작용한다.




(위에서 본 모습이며, $F = Mak(\omega_1 - \omega_2)$이다. 철사의 장력(tension)은 지름 방향이므로 축에 대한 모멘트가 없다.)

### 운동 방정식

마찰력 $F = Mak(\omega_1 - \omega_2)$는 축으로부터 거리 $\frac{1}{2}a$인 곳에서 반지름에 수직으로 작용하므로, 축에 대한 모멘트는

$$F \cdot \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2).$$

이다. 입자의 무게와 수직항력(normal reaction)은 연직 방향이므로 연직축에 대한 모멘트가 없고, 축 자체는 매끄럽다. 원판의 경우 마찰은 회전을 방해한다.

$$\tfrac{1}{2}Ma^2 \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = -\tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = -k(\omega_1 - \omega_2).$$

입자의 경우 마찰은 회전을 일으킨다.

$$\tfrac{1}{8}Ma^2 \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = 4k(\omega_1 - \omega_2).$$

(입자에 대해서는 접선 방향으로 뉴턴 제2법칙(second law)을 써도 된다. $\frac{1}{2}M \cdot \frac{1}{2}a\,\dot{\omega}_2 = F$이며, 이는 같은 방정식이다.)

### 보존되는 조합

첫 번째 방정식에 4를 곱하고 두 번째 방정식을 더하면

$$4\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = -4k(\omega_1 - \omega_2) + 4k(\omega_1 - \omega_2) = 0,$$

이므로 $4\omega_1 + \omega_2$는 상수이다. $t = 0$에서 이 값은 $4\Omega + 0$이므로

$$4\omega_1 + \omega_2 = 4\Omega,$$

이고, 이것이 보이려던 식이다. 이는 축에 대한 각운동량 보존이다. $I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = \frac{1}{8}Ma^2(4\omega_1 + \omega_2)$이고, 외력은 (축에서의 반작용, 중력, 연직 방향의 반작용뿐이며) 모두 축에 대한 모멘트가 없다.

### $\omega_1$ 구하기

> **생각해 보기** 서로 얽힌 방정식이 두 개 있다. 어떤 한 가지 양이 그것만으로 이루어진 방정식을 만족하는가?

두 변화율은 모두 차 $u = \omega_1 - \omega_2$에만 의존하므로, 이 양을 살펴본다. 두 방정식을 빼면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = -ku - 4ku = -5ku,$$

이고, $u(0) = \Omega - 0 = \Omega$이다. 변수분리(separation of variables)를 하면 (또는 지수적 감쇠(exponential decay)임을 알아보면)

$$\omega_1 - \omega_2 = u = \Omega \mathrm{e}^{-5kt}.$$

이다. 이것을 $4\omega_1 + \omega_2 = 4\Omega$에 더하면 $\omega_2$가 소거된다.

$$5\omega_1 = 4\Omega + \Omega \mathrm{e}^{-5kt}, \qquad \text{따라서} \qquad \omega_1 = \frac{\Omega}{5}\left(4 + \mathrm{e}^{-5kt}\right),$$

이고, 이것이 보이려던 식이다. 이로부터 $\omega_2 = 4\Omega - 4\omega_1 = \frac{4}{5}\Omega\left(1 - \mathrm{e}^{-5kt}\right)$이다.

다른 방법으로, $\omega_2 = 4\Omega - 4\omega_1$을 원판의 방정식에 대입하면 선형(linear) 방정식 $\dot{\omega}_1 = -5k\omega_1 + 4k\Omega$를 얻고, $\omega_1(0) = \Omega$일 때 그 해는 위와 같다.

## 검산

- $t = 0$일 때: $\omega_1 = \frac{1}{5}\Omega(4+1) = \Omega$이고 $\omega_2 = 0$이다. 맞다.
- $t \to \infty$일 때: $\omega_1, \omega_2 \to \frac{4}{5}\Omega$로, 마찰이 결국 만들어 내야 하는 공통의 속력이 된다. 최종 운동 에너지(kinetic energy)는 $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8}Ma^2 \cdot \frac{16}{25}\Omega^2 = \frac{1}{5}Ma^2\Omega^2$이고 처음에는 $\frac{1}{4}Ma^2\Omega^2$이므로, 에너지의 5분의 1이 마찰로 손실된다. 이는 "완전 비탄성(perfectly inelastic)" 결합에서 예상되는 결과이다.
- 수치적으로, $M = a = k = \Omega = 1$로 두고 두 운동 방정식을 $t = 1$까지 단계별로 계산하면 $\omega_1 = 0.80135$, $\omega_2 = 0.79461$을 얻는데, 이는 $\frac{1}{5}(4 + \mathrm{e}^{-5})$ 및 $\frac{4}{5}(1 - \mathrm{e}^{-5})$와 일치하며, $4\omega_1 + \omega_2$는 내내 4로 유지된다.

## 흔한 실수

- 입자의 관성 모멘트를 $\frac{1}{2}M(\frac{1}{2}a)^2$ 대신 (입자가 가장자리에 있는 것처럼) $\frac{1}{2}Ma^2$으로 잡는다.
- 회전 운동 방정식에 마찰력의 모멘트 $F \cdot \frac{1}{2}a$가 아니라 마찰력 자체를 쓴다.

- 두 방정식에서 마찰의 부호를 같게 둔다. 마찰은 원판을 느리게 하고 입자를 빠르게 한다.

## STEP 너머

여기서 마찰은 내력이고, $4\omega_1 + \omega_2$의 보존은 충돌에서의 운동량 보존을 회전 운동으로 옮긴 것이다. 공통의 속력으로 지수적으로 다가가는 현상은 점성 저항(viscous drag)으로 결합된 두 물체와 같은 수학이다. 더 일반적으로, 선형계 $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$는 $A$의 고유벡터(eigenvector)로 나타내면 분리된다. 여기서 고유벡터는 조합 $4\omega_1 + \omega_2$ (고윳값(eigenvalue) 0)와 $\omega_1 - \omega_2$ (고윳값 $-5k$)이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 회전과 각운동량을 꼼꼼하게 전개하고, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 고유벡터를 이용해 선형계를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.