풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 13

역학 • 평형과 모멘트

> **STEP II 견본 문제지, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q13

핵심 아이디어

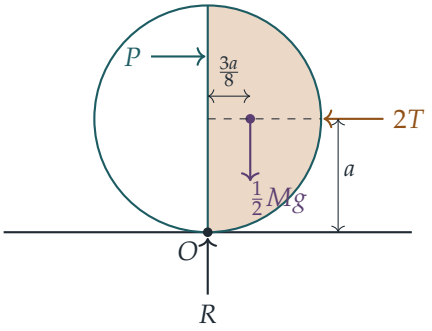
오렌지가 흩어진다면, 조각들이 바깥쪽으로 넘어지면서 흩어질 것이다. 이때 각 조각은 구가 탁자에 닿는 단 한 점을 중심으로 회전한다. 그래서 오렌지를 자르는 평면 중 하나를 따라 오렌지를 두 쪽으로 나누고, 한쪽 절반에 대하여 그 가장 낮은 점을 지나는 수평선에 대한 모멘트(moment)를 계산한다. 절반의 무게는 그것을 넘어뜨리려 하고, 이를 붙잡아 둘 수 있는 것은 다른 무엇도 아닌 오직 리본뿐이다. 다른 절반이 주는 힘은 상황을 더 나쁘게 만들 수만 있으며, 바로 여기서 "적어도"라는 말이 나온다.

풀이

모형

초콜릿은 균일한 강체(rigid body)로, 리본은 질량이 없고 둘레 전체에서 같은 장력(tension) T를 갖는 것으로 다룬다. 또 조각들은 크기가 모두 같고 그 개수가 짝수라고 가정한다(실제 초콜릿 오렌지는 스무 조각이다). 그러면 축을 지나는 자르는 평면 하나가 오렌지를 두 절반으로 나누고, 각 절반은 각이 π인 반구 모양의 쐐기가 된다. 마지막에는 자른 면이 매끄럽다면 이 논증이 어떤 조각 묶음에 대해서도 성립함을 확인한다.

구는 축의 맨 아래인 단 한 점 O에서만 탁자에 닿는다. O를 원점으로 하고, z축은 연직 위쪽으로, x축은 수평 방향으로 축에서 우리가 살펴볼 절반(그림의 오른쪽 절반) 쪽을 향하도록 좌표축을 잡는다. 두 절반을 나누는 평면은 $x = 0$이다. ℓ을 O를 지나고 그 평면 위에 있는 수평선(y축)이라 하자. ℓ에 대한 모멘트를 계산하되, 절반을 축에서 멀어지는 바깥쪽으로 넘어뜨리려는 모멘트를 양으로 센다.



한쪽 절반에 작용하는 힘

오른쪽 절반의 질량은 $\frac{1}{2}M$이고, 여기에 작용하는 외력은 다음과 같다.

- **무게** $\frac{1}{2}Mg$는 질량중심(centre of mass)에 작용한다. 주어진 결과에 $2\theta = \pi$를 대입하면 질량중심은 축으로부터
$$\frac{3\pi a \sin(\pi/2)}{16(\pi/2)} = \frac{3a}{8}$$
만큼 떨어진 곳, $x > 0$인 쪽에 있다. 이 힘의 ℓ에 대한 모멘트는 넘어뜨리는 방향으로 $\frac{1}{2}Mg \cdot \frac{3a}{8} = \frac{3}{16}Mga$이다.
- **탁자**: 수직항력(normal reaction)과 경우에 따라 마찰력(friction)이 있으며, 모두 O에 작용한다. O는 ℓ 위에 있으므로 이 힘들은 ℓ에 대한 모멘트를 갖지 않는다.
- **리본**은 적도의 절반을 감싸고 있다. 폭이 좁은 리본은 표면을 수직으로 누르며, 그 힘은 단위 길이당 T/a이다(매끄러운 곡선 위에 걸친 줄과 같다). 각 $-\frac{\pi}{2}$와 $\frac{\pi}{2}$ 사이의 호에서 x성분을 모두 더하면 축 쪽으로
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{T}{a} \cos\phi \; a \, \mathrm{d}\phi = 2T$$
이고, y성분은 대칭성에 의해 상쇄된다. (같은 말이지만, 리본이 나누는 평면을 지나는 곳에서 리본을 자르면 잘린 두 끝이 각각 $-x$ 방향으로 장력 T로 당기므로 역시 $2T$가 된다.) 이 힘은 모두 수평이고 높이 a에서 작용하므로, ℓ에 대한 모멘트는 **되돌리는** 방향으로 $2T \cdot a$이다.
- **다른 절반**은 평평한 면 $x = 0$을 통해 작용한다. 이것이 유일하게 다루기 까다로운 힘이지만, 이 힘이 어떻게 분포되어 있는지는 알 필요가 없다.

> ? **생각해 보기** 다른 절반이 주는 힘은 왜 절반이 넘어지는 것을 돕기만 할 수 있을까?

면의 각 작은 부분에 작용하는 힘을 면에 수직인 부분과 면을 따르는 부분(자른 면이 거칠다면 마찰력)으로 나눈다.

- 수직인 부분은 x 방향이다. 두 절반은 서로 눌려 있을 뿐 붙어 있지는 않으므로, 이 부분은 $+x$ 방향으로 미는 힘이다. 이 힘은 어떤 높이 $z \geq 0$에서 작용하므로, ℓ에 대한 모멘트는 z에 그 크기를 곱한 값이며 결코 음이 아니다. 즉 이 힘은 절반을 바깥쪽으로 넘어뜨리려 한다.
- 면을 따르는 부분은 모두 평면 $x = 0$ 위에 있고, 이 평면은 ℓ도 포함한다. 작용선이 ℓ과 같은 평면 위에 있는 힘은 ℓ과 만나거나 ℓ과 평행하므로, ℓ에 대한 모멘트를 갖지 않는다.

따라서 접촉의 세부 사항이 어떻든, 다른 절반은 넘어뜨리는 방향으로 전체 모멘트 $P_{\text{mom}} \geq 0$을 준다.

ℓ에 대한 모멘트

절반은 평형(equilibrium) 상태에 있으므로 ℓ에 대한 전체 모멘트는 0이다.

$$2Ta = \tfrac{3}{16}Mga + P_{\text{mom}}.$$

$P_{\text{mom}} \geq 0$이므로

$$2Ta \;\geq\; \tfrac{3}{16}Mga, \qquad \text{따라서} \qquad T \;\geq\; \tfrac{3}{32}Mg,$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다. 등호는 두 절반이 서로를 전혀 누르지 않아서 간신히 붙어 있을 때에 정확히 성립한다.

조각의 개수가 짝수가 아닐 때

대신 자른 면이 매끄럽다면, 온전한 조각들로 이루어진 각 2θ의 어떤 쐐기에 대해서도 같은 계산이 성립한다. x축을 쐐기의 대칭면을 따라 잡고, ℓ을 O를 지나고 그 평면에 수직인 수평선으로 잡는다. 쐐기의 무게는 $\frac{\theta}{\pi}Mg$이고 거리 $\frac{3\pi a \sin\theta}{16\theta}$인 곳에 작용하므로, 넘어뜨리는 모멘트는 $\frac{3}{16}Mga\sin\theta$이다. 쐐기의 호 위에 있는 리본은 높이 a에서 $2T\sin\theta$로 안쪽으로 당긴다. 매끄러운 면은 면에 수직인 수평 방향으로 미는 힘만 주며, 이 힘들의 $+x$ 방향 성분은 음이 아니므로 이번에도 넘어뜨리는 모멘트를 늘리기만 한다. 따라서 $2Ta\sin\theta \geq \frac{3}{16}Mga\sin\theta$이고, $\sin\theta$가 약분되어 다시 $T \geq \frac{3}{32}Mg$를 얻는다. 어떤 조각 묶음을 고르든 한계는 같다.

검산

- 주어진 질량중심 결과에 $2\theta = \pi$를 넣으면 $\frac{3a}{8}$이 되는데, 이는 평평한 면에서 잰 속이 찬 반구의 질량중심으로 잘 알려진 값이다. 몬테카를로(Monte Carlo) 추정으로 절반에 대해 $0.376a$를 얻으며, 다른 쐐기 각에 대해서도 공식과 일치한다.
- 각 2θ인 호 위에서 리본의 수직 방향 힘을 수치적으로 더하면 $2T\sin\theta$가 나온다. 예를 들어 절반에 대해서는 $2T$이다.

- 한계 $\frac{3}{32}Mg \approx 0.094Mg$는 확인해 본 모든 쐐기 각($2\theta = 0.6,\ \pi,\ 2.4,\ 5$)에서 같게 나온다. 한계가 오렌지를 어떻게 자르느냐가 아니라 오렌지 전체에만 의존한다는 점은 안심이 된다.
- 단위: 모멘트는 힘 곱하기 길이이고, a가 약분되어 힘이 남는다.

흔한 실수

- 구의 중심이나 적도 위의 한 점에 대한 모멘트를 계산하는 것. 그러면 탁자나 다른 절반이 주는 미지의 힘이 식에 들어온다. 점 O를 고르는 이유는 바로 탁자가 주는 힘이 그 점을 지나는 직선에 대한 모멘트를 갖지 않기 때문이다.
- 리본이 절반에 주는 힘을 T라고 하는 것. 리본은 절반의 호 양 끝을 모두 당기므로 합력은 $2T$이다.
- 근거 없이 두 절반 사이의 힘을 0으로 두는 것. 그렇게 하면 등호가 나온다. "적어도"는 이 힘이 밀 수만 있다는 점을 알아차리는 데서 나온다.

STEP 너머

이것은 미지의 내력이 있는 정역학(statics) 문제로, 구할 수 없는 미지수를 없애 주는 축을 고른 다음, 나머지는 부등식(접촉력은 밀기만 하고 결코 당기지 않는다)으로 처리한다. 같은 추론이 석조 아치와 돔의 분석에도 깔려 있다. 이런 구조물은 재료 내부에 머무르는 추력선(line of thrust)을 찾을 수 있을 때에만 서 있을 수 있다. 질량중심 결과 자체는 구면 극좌표에서의 표준적인 삼중적분으로, 직접 유도해 볼 만한 가치가 충분하다. 강체 평형에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.