풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 12

역학 • 철사 위의 진동

STEP II 견본 문제지, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

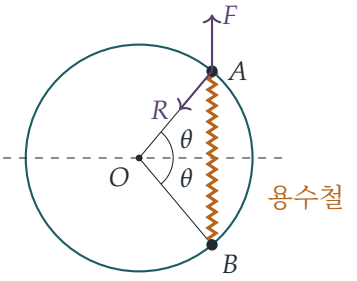
step.maths.org/questions/spec-s2-q12

핵심 아이디어

철사가 매끄러우므로 일을 하는 힘은 용수철의 힘뿐이고, 따라서 역학적 에너지(mechanical energy)가 보존된다. 필요한 것은 θ로 나타낸 용수철의 길이(원의 현(chord))와 각 구슬의 속력뿐이다. 잠시 생각해 볼 점이 두 가지 있다. 각 AOB를 이등분하는 직선은 왜 고정되어 있는가? 그리고 소문항 (ii)에서 구슬들이 지름의 양 끝에 도달할 만큼 충분한 에너지를 가지면 어떤 일이 일어나는가?

풀이

구슬들을 수평면 위에 놓인 매끄러운 원형 철사 위의 질점으로 모형화하고, 두 구슬은 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 용수철로 연결되어 있다고 하자. 중력은 연직 방향이고 철사의 반작용의 연직 성분과 평형을 이루므로, 수평 방향의 운동에는 아무 역할도 하지 않는다.



그림에서 F는 용수철이 A를 미는 힘이고(용수철이 처음에 압축되어 있으므로 BA 방향), R는 철사가 A에 작용하는 반작용의 수평 성분이다.

에너지 방정식 세우기

각 구슬의 위치를 원 위의 각으로 나타내자. A는 각 ϕ_A에, B는 각 ϕ_B에 있다.

> **생각해 보기** 두 구슬이 고정된 직선에 대해 대칭으로, 같은 속력으로 움직인다고 가정할 수 있는 이유는 무엇인가?

O를 지나는 연직축에 대한 모멘트(moment)를 생각하자. A와 B에 작용하는 용수철의 힘은 크기가 같고 방향이 반대이며 같은 직선 AB 위에서 작용하므로, 그 모멘트는 상쇄된다. 각 철사의 반작용의 수평 성분 R는 철사에 수직이므로 O를 지나는 반지름 방향을 향하고, 모멘트가 없다. 연직 방향의 힘들은 연직축에 대한 모멘트가 없다. 따라서 각운동량(angular momentum) $ma^2(\dot\phi_A + \dot\phi_B)$는 보존된다. 구슬들이 정지 상태에서 놓이므로 각운동량의 처음 값은 0이고, 따라서 $\phi_A + \phi_B$는 일정하게 유지된다. 즉 각 AOB의 이등분선(bisector)은 고정되어 있다. 이 이등분선을 그림의 점선으로 잡아 $\phi_A = \theta$, $\phi_B = -\theta$가 되게 하자. 그러면 각 구슬은 속력 $a\dot\theta$로 움직인다.

용수철은 현 AB이고, 그 길이는 $2a\sin\theta$이다. 자연 길이(natural length)는 $2a\sin\alpha$이므로 늘어난 길이(extension)는 $x = 2a(\sin\theta - \sin\alpha)$이고, 탄성 에너지(elastic energy)는

$$\frac{\lambda x^2}{2\cdot 2a\sin\alpha} = \frac{4\lambda a^2(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{4a\sin\alpha} = \frac{\lambda a(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}.$$

이다. x가 제곱되어 있으므로 이 식은 $x<0$일 때(압축)에도 성립한다. 운동 에너지(kinetic energy)는 $2\cdot\frac12 m(a\dot\theta)^2 = ma^2\dot\theta^2$이다. 철사는 매끄럽고 그 반작용은 항상 운동 방향에 수직이므로 일을 하지 않으며, 따라서 에너지가 보존된다. 놓는 순간 $\theta=\beta$이고 $\dot\theta = 0$이므로

$$ma^2\dot\theta^2 + \frac{\lambda a(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha} = \frac{\lambda a(\sin\beta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}.$$

이다. 양변에 $\sin\alpha/a$를 곱하면

$$ma\dot\theta^2\sin\alpha + \lambda(\sin\theta-\sin\alpha)^2 = \lambda(\sin\beta-\sin\alpha)^2,$$

를 얻으며, 이것이 보이려던 식이다. 용수철이 처음에 압축되어 있으므로 $\beta<\alpha$임에 주의한다.

소문항 (i)

에너지 방정식을 t에 대해 미분하면

$$2ma\sin\alpha\,\dot\theta\ddot\theta + 2\lambda(\sin\theta-\sin\alpha)\cos\theta\,\dot\theta = 0.$$

이다. $2\dot\theta$로 나누면(구슬이 움직이고 있는 동안에는 언제나 가능하고, 그 결과는 연속성에 의해 모든 t로 확장된다) 운동방정식(equation of motion)

$$ma\sin\alpha\,\ddot\theta = -\lambda(\sin\theta-\sin\alpha)\cos\theta.$$

을 얻는다. 평형점은 용수철이 자연 길이를 갖는 $\theta = \alpha$이다. $\beta - \alpha$가 작으면 θ는 α 가까이에 머무르므로(에너지 방정식에서 $|\sin\theta - \sin\alpha| \le |\sin\beta - \sin\alpha|$), 작은 ε에 대해 $\theta = \alpha + \varepsilon$로 쓰자. 1차 근사로 $\sin\theta - \sin\alpha \approx \varepsilon\cos\alpha$이고, $\cos\theta \approx \cos\alpha$인데 이 인수는 이미 작은 양에 곱해진다. 따라서

$$\ddot{\varepsilon} \approx -\frac{\lambda\cos^2\alpha}{ma\sin\alpha}\,\varepsilon,$$

이고, 이는 $\omega^2 = \lambda\cos^2\alpha/(ma\sin\alpha)$인 단진동(simple harmonic motion)이다. 그러므로 주기(period)는

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda\cos^2\alpha}}.$$

이다.

소문항 (ii)

$k = \sqrt{ma\sin\alpha/\lambda}$라 하자. 에너지 방정식으로부터

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{k^2}\Big[(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - (\sin\theta - \sin\alpha)^2\Big].$$

이다. 구슬들은 $\sin\theta - \sin\alpha = \pm(\sin\alpha - \sin\beta)$일 때, 즉 $\sin\theta = \sin\beta$이거나 $\sin\theta = 2\sin\alpha - \sin\beta$일 때 멈춘다. $\theta = \beta$에서 출발하면 θ는 증가하고(압축된 용수철이 구슬들을 서로 밀어낸다), $\sin\beta < \sin\theta < 2\sin\alpha - \sin\beta$인 동안 $\dot{\theta}^2 > 0$이다.

? 생각해 보기 두 경우 중 어느 경우에 해당하는지는 무엇으로 결정되는가?

θ가 $2\theta = \pi$에 이르기 전에 두 번째 정지점에 도달할 수 있는지에 달려 있다. $2\theta = \pi$일 때 A와 B는 지름의 양 끝에 있고, $\sin\theta$는 최댓값 1에 이른다. 이는 $2\sin\alpha - \sin\beta$가 1보다 작은지 큰지에 따라 정해진다.

(a) $\sin\beta > 2\sin\alpha - 1$**.** 이때 $2\sin\alpha - \sin\beta < 1$이므로 $\sin\gamma = 2\sin\alpha - \sin\beta$인 예각 γ가 존재하고, $\gamma > \alpha$이다. 구슬들은 $\theta = \gamma$일 때 정지하며(이때 용수철은 처음에 압축되었던 만큼 늘어나 있다), θ는 β와 γ 사이에서 진동한다. 나아갔다가 되돌아오는 데 걸리는 시간이 같으므로

$$T = 2\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda}}\int_\beta^\gamma \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - (\sin\theta - \sin\alpha)^2}}, \qquad \gamma = \arcsin(2\sin\alpha - \sin\beta).$$

이다.

(b) $\sin\beta < 2\sin\alpha - 1$**.** 이제 $2\sin\alpha - \sin\beta > 1 \ge \sin\theta$이므로, θ가 β와 $\frac{1}{2}\pi$ 사이에 있는 동안 $\dot{\theta}$는 결코 0이 되지 않는다. 즉 구슬들은 여전히 움직이는 채로 지름의 양 끝을 지나간다. 그 뒤로 현은 다시 짧아진다. 에너지 방정식에는 θ가 $\sin\theta$를 통해서만 나타나고, 이는 $\frac{1}{2}\pi$에 대해 대칭이므로, $\frac{1}{2}\pi$에서 $\pi - \beta$까지의 운동은 β에서 $\frac{1}{2}\pi$까지의 운동을 거울에 비춘 것과 같다. 구슬들은 $\theta = \pi - \beta$에서 정지하고, 이때 용수철은 다시 처음 길이로 압축되어 있다.

그러면 용수철은 구슬들을 왔던 길로 되밀어 보낸다. ($\theta = \pi - \beta$에서는 $\sin\theta - \sin\alpha < 0$이고 $\cos\theta < 0$이므로 운동방정식에서 $\ddot{\theta} < 0$이다.) 한 번의 완전한 진동은 $\beta \to \pi - \beta \to \beta$이고, 이는 β에서 $\frac{1}{2}\pi$까지의 4분의 1 구간 네 개로 이루어진다.

$$T = 4\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda}}\int_{\beta}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\sin\alpha-\sin\beta)^2-(\sin\theta-\sin\alpha)^2}}.$$

$\sin\alpha < 1$이므로 $2\sin\alpha - 1 < \sin\alpha$이고, 따라서 두 경우 모두 $\beta < \alpha$와 모순되지 않는다. 경우 (b)는 $2\sin\alpha - 1 > 0$일 때, 즉 $\frac{1}{6}\pi < \alpha < \frac{1}{4}\pi$일 때에만 일어날 수 있다.

검산

- 경우 (a)에서 치환(substitution) $\sin\theta = \sin\alpha - (\sin\alpha - \sin\beta)\cos u$를 하면 적분은 $\int_0^{\pi}\mathrm{d}u/\cos\theta$가 된다. $\beta \to \alpha$일 때 이 값은 $\pi/\cos\alpha$로 수렴하며, 이로부터 소문항 (i)의 주기를 다시 얻는다.
- $m = 1.3$, $a = 0.7$, $\lambda = 2.1$로 두고 두 구슬이 철사 위에서 각각 독립적으로 움직이도록 시뮬레이션하였다. 에너지 방정식은 반올림 오차 범위 안에서 성립했고 이등분선은 고정되어 있었다. $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.59$일 때 주기는 3.766이었고, 소문항 (i)에서 얻은 값은 3.7657이다. $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.4$(경우 (a))일 때는 4.8847이었고, 적분으로 얻은 값은 4.8846이다. $\alpha = 0.75$, $\beta = 0.1$(경우 (b))일 때는 7.0553이었고 계산값도 7.0553이었으며, 예측대로 θ는 $\pi - \beta$에서 최댓값에 이르렀다.

흔한 실수

- 탄성 에너지로 $\lambda x^2/(2a)$를 쓰는 것. 분모는 **자연 길이**의 두 배인 $2 \cdot 2a\sin\alpha$이다.
- 경우 (b)에서 적분을 $\theta = \frac{1}{2}\pi$에서 멈추거나 구슬들이 그곳에서 정지한다고 주장하는 것. 구슬들은 0이 아닌 속력으로 지름의 양 끝을 지나가므로, 주기는 $2\int_{\beta}^{\pi/2}$가 아니라 $4\int_{\beta}^{\pi/2}$이다.

STEP 너머

소문항 (ii)의 주기 적분은 초등함수로 계산할 수 없다. 이 적분들은 단진자(simple pendulum)의 정확한 주기를 주는 **타원 적분**(elliptic integrals)과 가까운 친척이다. 소문항 (i)의 작은 진동의 주기는 진폭과 무관하지만, 정확한 주기는 그렇지 않다는 점에 주목하자. 선형화한 진동자와 비선형 진동자 사이의 이러한 대비는 고전역학 첫 강의의 중심 주제이다. 여기서 이등분선을 고정시켜 준, 내력이 있는 계의 각운동량 보존은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.