풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 11

역학 • 포물체와 충돌

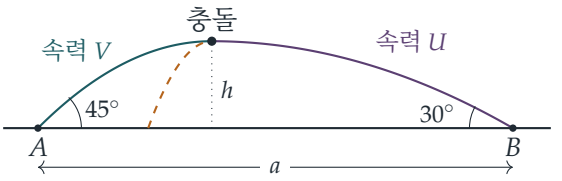
> **STEP II 견본 문제지, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q11

핵심 아이디어

"두 입자가 충돌할 때 각 입자는 최고점에 있다"는 말에는 두 조건이 함께 들어 있다. 두 입자가 꼭대기에 이르는 데 걸리는 **시간이 같아야** 하고, 그때 두 입자가 **같은 위치에** 있어야 한다. 시간 조건은 U와 V를 연결하고, 이어서 두 수평 거리를 더하면 a가 된다. 충돌 후에 가장 중요한 관찰은 두 입자가 꼭대기에서 모두 수평으로 움직이고 있으므로, 합쳐진 입자는 연직 속도가 전혀 없는 상태에서 출발한다는 점이다.

풀이

두 입자를 모두 AB를 포함하는 연직 평면에서 중력만 받아 움직이는(공기 저항이 없는) 포물체(projectile)로 모형화한다. 수평 방향은 A에서 B로 향하는 쪽을 양의 방향으로, 연직 방향은 위쪽을 양의 방향으로 잡는다.



$U^2 = 2V^2$ 보이기

A에서 출발한 입자의 처음 속도 성분은 수평 방향으로 $\frac{V}{\sqrt{2}}$, 연직 방향으로 $\frac{V}{\sqrt{2}}$이다. B에서 출발한 입자의 성분은 수평 방향(A 쪽)으로 $\frac{\sqrt{3}}{2}U$, 연직 방향으로 $\frac{1}{2}U$이다.

포물체는 연직 속도가 0일 때 최고점에 있다. 처음 연직 속력이 w이면 이는 시각 w/g에 일

어난다. 두 입자는 같은 순간에 발사되므로, 충돌하는 순간 둘 다 최고점에 있으려면 이 시각들이 같아야 한다.

$$\frac{V}{\sqrt{2}g} = \frac{U}{2g} \quad \Longrightarrow \quad U = \sqrt{2}V \quad \Longrightarrow \quad U^2 = 2V^2,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 이 공통의 시각을 $T = \dfrac{V}{\sqrt{2}g}$라 하자.

생각해 보기 두 최고점의 높이가 같은지도 확인해야 하지 않을까?

그렇다. 시각이 같은 것은 필요조건일 뿐이고, 두 입자가 실제로 만나야 한다. 처음 연직 속력이 w인 포물체는 높이 $w^2/(2g)$까지 올라간다. A의 입자는 $\frac{V^2}{2}/2g = \frac{V^2}{4g}$이고, B의 입자는 $\frac{U^2}{4}/2g = \frac{2V^2}{8g} = \frac{V^2}{4g}$이다. 두 값이 같으므로 $U^2 = 2V^2$이기만 하면 높이는 저절로 일치한다. (사실 이는 당연하다. 두 입자는 같은 가속도를 받으며 같은 시각 T에 연직 속도가 0이 되므로, 높이가 모두 $\frac{1}{2}gT^2$이다.) 충돌 높이를

$$h = \frac{V^2}{4g}$$

로 쓰자.

a 구하기

시각 T에 수평 위치도 같아야 한다. 수평 속도는 일정하므로, 시간 T 동안 A에서 출발한 입자는 B 쪽으로 $\frac{V}{\sqrt{2}}T$만큼, B에서 출발한 입자는 A 쪽으로 $\frac{\sqrt{3}}{2}UT$만큼 이동한다. 두 입자가 만나므로 이 거리들의 합은 a이다.

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{V}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}\,V\right)\frac{V}{\sqrt{2}g} \\ &= \frac{V^2}{g}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{V^2}{2g}(1+\sqrt{3}), \end{aligned}$$

이것이 구하는 결과이다.

충돌 후

충돌하는 순간 각 입자는 최고점에 있으므로 각각 **수평으로** 움직이고 있다. A의 입자는 속도 $+\frac{V}{\sqrt{2}}$로, B의 입자는 속도 $-\frac{\sqrt{3}}{2}U = -\frac{\sqrt{3}V}{\sqrt{2}}$로 움직인다.

생각해 보기 어떤 운동량이, 어느 방향으로 보존되는가?

매우 짧은 충돌 동안 큰 힘은 두 입자 사이에 작용하는 크기가 같고 방향이 반대인 힘뿐이다. 중력은 유한하고 무시할 만큼 짧은 시간 동안만 작용한다. 따라서 전체 운동

량(momentum)은 보존된다. 질량 $2m$인 합쳐진 입자의 속도를 v라 하면, 수평 방향으로

$$2m\,v = m\frac{V}{\sqrt{2}} - m\frac{\sqrt{3}\,V}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad v = -\frac{(\sqrt{3}-1)V}{2\sqrt{2}}.$$

음의 부호는 합쳐진 입자가 속력 $\dfrac{(\sqrt{3}-1)V}{2\sqrt{2}}$로 A 쪽으로 되돌아간다는 뜻이다. 연직 방향으로는 두 입자의 연직 속도가 모두 0이었으므로, 합쳐진 입자도 연직 속도 0에서 출발한다. 이제 합쳐진 입자는 높이 $h = \frac{V^2}{4g}$에서 수평으로 발사된 포물체이다. 수평 속도는 $|v|$로 유지된다. 평면에 닿을 때의 연직 속력 w는 $w^2 = 0 + 2gh$에서 얻는다.

$$w^2 = 2g\cdot\frac{V^2}{4g} = \frac{V^2}{2}, \qquad w = \frac{V}{\sqrt{2}}.$$

따라서 속도가 수평과 이루는 각 ϕ는 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned}\tan\phi = \frac{w}{|v|} &= \frac{V}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-1)V} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}\\ &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = 1+\sqrt{3},\end{aligned}$$

여기서 둘째 줄에서는 분모를 유리화(rationalising)하였다. 이것으로 문제가 끝난다.

검산

- **단위.** V^2/g의 단위는 $(\mathrm{m\,s^{-1}})^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}) = \mathrm{m}$로 거리에 맞는 단위이고, $\tan\phi$는 속력의 비이므로 차원이 없다(dimensionless). $\tan\phi$가 V나 g에 전혀 의존하지 않는다는 점도 좋은 신호이다.
- **기하적 타당성.** A의 입자는 A로부터 수평 거리 $\frac{V^2}{2g}$인 곳에서 꼭대기에 이르고, B의 입자는 B로부터 $\sqrt{3}\,\frac{V^2}{2g}$인 곳에서 꼭대기에 이른다. 더 큰 속력으로 더 낮은 30° 각도로 발사된 입자가 더 멀리 가며, 두 거리를 더하면 a가 된다.
- **수치 확인.** $V = 7.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 두고 두 궤적을 시간에 따라 단계적으로 계산하였더니, $t = T$에서 두 입자가 미터 단위로 같은 점 $(2.719, 1.359)$에 있었고 두 연직 속도가 모두 0이었다. 합쳐진 입자를 평면까지 단계적으로 계산하였더니 $\tan\phi \approx 2.73205$가 나와 $1+\sqrt{3} = 2.732050\ldots$와 일치하였다.

흔한 실수

- 연직 속도가 0이 아닌 것으로 보고 연직 방향 운동량 보존을 적용하는 것. 각 궤적의 꼭대기에서는 연직 속도가 0이며, 바로 이 점 때문에 충돌이 이렇게 간단해진다.

- 수평 운동량을 빼지 않고 더하는 것. 두 입자는 반대 방향으로 움직이고 있다.
- $w/|v|$ 대신 $\tan\phi = |v|/w$(연직과 이루는 각)를 쓰는 것.

STEP 너머

합쳐지는 입자는 완전 비탄성 충돌(perfectly inelastic collision)의 가장 간단한 예이다. 운동량은 보존되지만 운동 에너지(kinetic energy)는 보존되지 않는다(여기서는 두 입자가 반대 방향으로 움직이고 있었으므로 상당히 많은 에너지가 손실된다). 대학에서는 이것이 질량중심계(centre-of-mass frame)에서의 충돌 연구로 이어진다. 질량중심계에서는 전체 운동량이 0이고, 손실되는 에너지는 질량중심에 대한 운동 에너지 전체이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 운동량과 충돌을 이런 방식으로 다루며 훌륭한 문제를 많이 담고 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.