풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 10

순수수학 • 논리 퍼즐

> **STEP II 견본 문제지, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q10

핵심 아이디어

모든 것은 한 가지 번역에 달려 있다. 화자가 두꺼비라는 것은 그 화자의 말이 참이라는 것과 정확히 같다. 그러므로 각 등장인물에 대하여 "두꺼비일 수 있는가?"와 "개구리일 수 있는가?"를 묻고, 그 인물의 말이 잘못된 진리값(truth value)을 갖게 만드는 선택은 모두 버린다. 특히 화자 자신에 대한 말을 주의 깊게 보자. 그런 말 가운데 일부는 어느 한 종류의 생물은 결코 할 수 없는 말이며, 보통 그것이 실마리가 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 "두꺼비"는 항상 참말을 하는 자, "개구리"는 항상 거짓말을 하는 자를 뜻한다. 따라서

$$\text{화자가 두꺼비이다} \iff \text{화자의 말이 참이다.}$$

각 장면에서 이 규칙과 모순되지 않는 배정을 모두 찾고, 정확히 하나만 살아남는지 확인한다.

소문항 (i)

A가 두꺼비라고 가정하자. 그러면 A의 말이 참이므로, 특히 A는 개구리여야 하는데 이는 모순(contradiction)이다. 따라서 A는 개구리이다.

그러므로 A의 말은 거짓이다. 즉 A와 B가 둘 다 개구리인 것은 아니다. A가 개구리이므로, 이 말이 거짓이 되는 유일한 방법은 B가 두꺼비인 것이다.

검산: A가 개구리이고 B가 두꺼비이면 "우리 둘 다 개구리이다"는 거짓이며, 개구리의 말은 마땅히 거짓이어야 한다. 따라서 **A는 개구리이고 B는 두꺼비이다**.

소문항 (ii)

이는 소문항 (i)을 거울에 비춘 것이다. C가 개구리라고 가정하자. 그러면 "D와 나 중 적어도 하나는 개구리이다"는 (C 하나만으로도) 참이 되는데, 개구리는 참말을 할 수 없다. 따라서 C는 두꺼비이다.

그러므로 C의 말은 참이다. 즉 C, D 중 적어도 하나는 개구리이다. C가 두꺼비이므로 D가 개구리여야 한다.

검산: C가 두꺼비이고 D가 개구리이면 그 말은 참이며, 두꺼비의 말은 마땅히 참이어야 한다. 따라서 **C는 두꺼비이고 D는 개구리이다**.

소문항 (iii)

E의 말 "G와 H는 둘 다 두꺼비이다"를 S라 하자. 그러면 G는 S가 참이라고 주장하고, H는 S가 거짓이라고 주장한다.

> ? **생각해 보기** 아직 누구에 대해서도 아는 것이 없다. 도대체 어디서부터 시작할 수 있을까?

E가 아니라 G와 H를 함께 보자. 두 사람의 말은 정확히 서로 반대이므로, 둘 중 정확히 하나만 참이다. 따라서 S가 무엇이 되든, G, H 중 정확히 하나는 두꺼비이고 나머지 하나는 개구리이다.

이것으로 S가 결정된다. G, H 중 하나는 개구리이므로 둘 다 두꺼비인 것은 아니고, 따라서 S는 거짓이다. 그러므로

- E는 거짓을 말했으므로 E는 개구리이다.
- G는 S가 참이라고 주장했는데 이는 거짓이므로 G는 개구리이다.
- H는 S가 거짓이라고 주장했는데 이는 참이므로 H는 두꺼비이다.

검산: G가 개구리이므로 "G와 H는 둘 다 두꺼비이다"는 실제로 거짓이며, 이는 모든 판정과 들어맞는다. 따라서 **E와 G는 개구리이고 H는 두꺼비이다**.

소문항 (iv)

여기서 "우리"는 I, J, K 세 명을 뜻한다.

I는 개구리이다. I가 두꺼비라면 "우리는 모두 개구리이다"가 참이 되어 I는 개구리여야 하므로 모순이다. 따라서 I는 개구리이고, I의 말은 거짓이다. 즉 셋 모두가 개구리인 것은 아니므로

$$J,\ K \text{ 중 적어도 하나는 두꺼비이다.} \qquad (*)$$

*J*는 **두꺼비이다**. 반대로 *J*가 개구리라고 가정하자. 그러면 $(*)$에 의해 *K*는 두꺼비이고, 생물들은 *I* 개구리, *J* 개구리, *K* 두꺼비로서 두꺼비가 정확히 하나이다. 그러면 *J*의 말이 참이 되는데, 개구리는 그런 말을 할 수 없다. 따라서 *J*는 두꺼비이다.

*K*는 **개구리이다**. *J*가 두꺼비이므로 *J*의 말은 참이다. 즉 셋 중 두꺼비는 정확히 하나이다. 그 두꺼비는 *J*이므로 *K*는 개구리이다.

> ? **생각해 보기** *K*가 개구리인데도 $(*)$가 여전히 성립하는가?

그렇다. $(*)$는 *J*, *K* 중 하나만 두꺼비이면 되는데, *J*가 두꺼비이다. 따라서 전체 검산은 다음과 같다. *I*의 "우리는 모두 개구리이다"는 거짓이고(*J*가 두꺼비이므로), *J*의 "우리 중 정확히 하나가 두꺼비이다"는 참이다(*J*만 두꺼비이므로). 두 말 모두 올바른 진리값을 가지므로 ***I*와 *K*는 개구리이고 *J*는 두꺼비이다**.

검산

각 장면에서 가능한 배정은 2^2개 또는 2^3개뿐이므로, 완전한 검산은 짧은 진리표(truth table)로 할 수 있다. 각 배정에 대하여, 모든 화자의 말이 그 화자가 두꺼비일 때 그리고 그때에만 참인지 확인하면 된다. 네 장면 모두에 대해 이 전수 조사를 실행해 보았고, 각 장면마다 정확히 하나의 배정, 곧 위에서 찾은 배정만 살아남았다. (유일성이 중요하다. 문제는 우리에게 **판정하라**고 요구하므로, 들어맞는 배정 하나를 찾는 것만으로는 부족하고 나머지를 배제해야 한다.)

흔한 실수

- 모순 없는 배정 하나를 찾고 거기서 멈추는 것. 다른 어떤 배정도 성립하지 않음을 보여야 하며, "만약 그렇다고 가정하면..."으로 시작하는 모순 논증이 바로 그 역할을 한다.
- 소문항 (iii)에서 *G*의 "이것은 참이다"를 *E*의 주장이 아니라 *G* 자신에 대한 말로 다루는 것.
- 소문항 (iv)에서 아무 말도 하지 않는 *K*도 "우리 모두"와 "우리 중 정확히 하나"에 포함된다는 사실을 잊는 것.

STEP 너머

이런 퍼즐은 명제 논리(propositional logic)의 연습 문제이다. 각 생물은 불 변수(Boolean variable) *t*, 각 말은 논리식 *P*이며, 모든 화자는 제약 조건 $t \iff P$를 부과한다. 이러한 제약 조건의 체계에 해가 존재하는지 판정하는 문제를 **충족 가능성**(satisfiability) 문제라

하며, 이는 이론 컴퓨터 과학의 핵심 문제이다. 또 소문항 (i)의 자기 파괴적인 말은 거짓말쟁이 역설(liar paradox)의 온순한 사촌이다. 레이먼드 스멀리언(Raymond Smullyan)의 *What Is the Name of This Book?*(이 책의 이름은 무엇인가?)은 기사와 건달(knights and knaves) 퍼즐을 즐겁게 모아 놓은 책으로, 차근차근 나아가 괴델(Gödel)의 불완전성 정리(incompleteness theorem)에까지 이른다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.