풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 1

순수수학 • 부분분수

> **STEP II 견본 문제지, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q1

핵심 아이디어

흔히 쓰는 부분분수(partial fractions) 분해 절차를 꺼내 들기 전에 분자를 살펴보자. 분자는 정확히 분모의 도함수(derivative)이다. 분모는 일차인수들의 곱으로 인수분해되므로 f는 로그 도함수(logarithmic derivative)이고, 곱의 로그 도함수는 각 인수의 로그 도함수의 합이다. 두 번째 부분에서는 방정식이 합이 1인 세 단위분수(unit fraction)의 합이 되며, 크기만 따져 보아도 x는 매우 작을 수밖에 없다.

풀이

부분분수

분모는 다음과 같이 인수분해된다.

$$D(x) = x^3 + (a+b)x^2 + abx = x(x^2 + (a+b)x + ab) = x(x+a)(x+b),$$

이를 미분하면

$$D'(x) = 3x^2 + 2(a+b)x + ab,$$

이고, 이것은 바로 분자이다. 따라서 $f(x) = D'(x)/D(x)$이다.

일반적인 경우, $a \neq b$. 세 인수 x, $x+a$, $x+b$는 서로 다르므로($a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$이기 때문이다) 세 개의 단순한 부분분수가 나올 것으로 예상된다. 곱의 미분법(product rule)을 쓰면

$$D'(x) = (x+a)(x+b) + x(x+b) + x(x+a),$$

이고, 각 항을 $D(x) = x(x+a)(x+b)$로 나누면

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}} \qquad (a \neq b).$$

를 얻는다. (같은 말로, $\mathrm{f}(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x(x+a)(x+b)|$이고, 곱의 로그는 합으로 나뉜다.) 물론 가리기 방법(cover-up rule)으로도 같은 결과를 얻는다. $x = 0$에서의 계수는 $ab/(ab) = 1$이고, $x = -a$에서는 $(3a^2 - 2a^2 - 2ab + ab)/((-a)(b-a)) = a(a-b)/(a(a-b)) = 1$이며, $x = -b$에서도 마찬가지이다.

생각해 보기 $a = b$일 때 이 꼴에는 어떤 문제가 생기는가?

특수한 경우, $a = b$. 이제 분모는 중복 인수를 가진 $x(x+a)^2$이므로 표준적인 꼴은 $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+a} + \frac{C}{(x+a)^2}$가 될 것이다. 그런데 분자도 인수 $x+a$를 가진다.

$$3x^2 + 4ax + a^2 = (3x+a)(x+a),$$

따라서 약분되어

$$\mathrm{f}(x) = \frac{3x+a}{x(x+a)} = \boxed{\frac{1}{x} + \frac{2}{x+a}} \qquad (a = b),$$

가 남는다. 마지막 단계는 가리기 방법이다($x = 0$이면 $a/a = 1$, $x = -a$이면 $-2a/(-a) = 2$). $(x+a)^{-2}$ 항은 전혀 없으므로 $C = 0$이다. 이 결과는 일반적인 공식에서 b를 a로 바꾼 것과 일치하지만, 중복 인수가 제곱항을 만들어 내는 대신 사라져 버렸다는 점은 눈여겨볼 만하다.

a와 b는 0이 아니므로 인수 x는 결코 $x+a$나 $x+b$와 같아질 수 없다. 따라서 경우는 이 둘뿐이다.

$\mathrm{f}(x) = 1$일 때

이제 x, a, b를 양의 정수라 하자. 위의 두 경우 모두에서($a = b$일 때의 공식은 일반 공식에 $b = a$를 넣은 것일 뿐이다)

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b},$$

이고, 세 항은 모두 양수이다. $a, b \geq 1$이므로 뒤의 두 항은 각각 $\frac{1}{x}$보다 엄밀하게 작다.

생각해 보기 각각 $\frac{1}{x}$ 이하인 세 분수의 합이 1이라면 x는 얼마나 클 수 있는가?

- $x = 1$이면 $\mathrm{f}(x) = 1 + (\text{양수}) > 1$이다.
- $x \geq 4$이면 $\mathrm{f}(x) < \frac{3}{x} \leq \frac{3}{4} < 1$이다.
- $x = 3$이면 $x + a \geq 4$이고 $x + b \geq 4$이므로 $\mathrm{f}(x) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{6} < 1$이다.

따라서 $\mathrm{f}(x) = 1$이려면 반드시 $x = 2$이어야 하고, 이때 필요한 조건은

$$\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} = \frac{1}{2}.$$

이다. 양변에 $2(2+a)(2+b)$를 곱하면 $2(2+b) + 2(2+a) = (2+a)(2+b)$, 즉 $8 + 2a + 2b = 4 + 2a + 2b + ab$이므로

$$ab = 4.$$

이다. a, b가 양의 정수이므로 가능한 경우는 $(a,b) = (1,4), (2,2), (4,1)$뿐이다. 그러므로 $\mathrm{f}(x) = 1$이 되는 것은 정확히

$$(x,a,b) = (2,1,4), \quad (2,2,2), \quad (2,4,1),$$

일 때이고, 요구한 대로 유한 개(세 개)의 값이다. $(2,2,2)$는 특수한 경우 $a = b$에 해당한다는 점에 주의하자: $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$.

검산

세 해는 잘 알려진 단위분수 항등식 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$과 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$이다. 수치적으로는, 무작위로 고른 유리수 2000개의 점에서($a \neq b$인 경우와 $a = b$인 경우 모두) 부분분수 꼴을 원래의 f와 정확한 유리수 연산으로 비교하였고, $1 \leq x, a, b < 200$인 모든 경우를 전수 탐색한 결과 위의 세 순서쌍만 정확히 나오고 다른 것은 나오지 않았다.

흔한 실수

- $a = b$인 경우에 $\frac{C}{(x+a)^2}$ 항을 넣고 무작정 계산하면서 약분을 알아채지 못하는 것. 계산하면 $C = 0$이 나와야 하며, 분자의 인수 $(x+a)$를 발견하면 그 수고를 덜 수 있다.
- $x = 1$과 $x = 3$을 배제하는 것을 잊는 것. 대략적인 부등식 $\mathrm{f} < 3/x$로는 $x \geq 4$만 처리된다.
- "$ab = 4$"에서 멈추고 해를 나열하지 않거나, $(1,4)$만 쓰고 $(4,1)$과 $(2,2)$를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

r_i가 다항식 D의 근일 때(중근은 중복도만큼 센다) 성립하는 항등식 $D'/D = \sum 1/(x - r_i)$는 매우 유용한 도구이다. 이 항등식은 근의 거듭제곱 합에 관한 뉴턴(Newton)의 항등식의 바탕이 되고, 복소해석학에서는 곡선을 따라 f'/f를 적분하여 그 곡선 내부에 있는 함수의 영점 개수를 세는 편각 원리(argument principle)의 바탕이 된다. 양의 정수에서 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$과 같은 방정식을 푸는 것은 이집트 분수(Egyptian fraction) 문제로, 디오판

토스 방정식(Diophantine equation)의 고전적인 한 분야이며, 우리가 쓴 것과 같은 크기 제한 논증이 모든 일을 해낸다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 편각 원리를 아름답게 기하적으로 설명하고, Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 디오판토스 방정식 공부를 시작하기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.