풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 9

순수수학 • 절댓값 부등식

> **STEP I 견본 문제지, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q9

핵심 아이디어

두 소문항 모두 절댓값(modulus) 기호 안의 식이 정확히 어디에서 부호가 바뀌는지, 또는 어떤 값을 지나는지를 찾아서 절댓값 기호를 없애는 문제이다. (i)에서는 $u = x + 1$로 놓으면 식이 $u - 2/u$가 되는데, 이 식은 $u = 0$의 양쪽에서 각각 증가하므로 부등식은 각 가지(branch)에서 u를 이차방정식의 두 근 사이로 제한할 뿐이다. (ii)에서는 $\cos x - \sin x$를 하나의 코사인으로 나타내면 부호가 바뀌는 곳이 드러나고, 그 점에서 적분을 나눈다.

풀이

소문항 (i)

식이 정의되려면 $x \neq -1$이어야 한다. $u = x + 1$로 놓으면 $u \neq 0$이고

$$x + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - 2}{x+1} = u - \frac{2}{u}.$$

이것을 $f(u)$라 하자. 주어진 부등식은 $-2 < f(u) < 2$이다.

> **생각해 보기** 왜 그냥 양변에 $x + 1$을 곱하지 않는가?

$x + 1$은 음수일 수 있고, 음수를 곱하면 부등호의 방향이 바뀌기 때문이다. 이를 부주의하게 처리하는 것이 답의 절반을 잃는 전형적인 실수이다. 대신 f의 모양을 이용한다. 도함수(derivative)는 $f'(u) = 1 + 2/u^2 > 0$이므로, f는 $u < 0$에서, 그리고 따로 $u > 0$에서 순증가(strictly increasing)한다. 각 가지에서 함숫값은 $-\infty$부터 $+\infty$까지 움직인다. $u \to 0^-$일 때 $-2/u \to +\infty$이고, $u \to 0^+$일 때 $-2/u \to -\infty$이며, $|u| \to \infty$일 때 $f(u) \sim u$이다. 따라서 각 가지에서 f는 -2와 2를 각각 정확히 한 번씩 취하고, $-2 < f < 2$는 정확히 그 두 점

사이에서 성립한다.

$u \neq 0$일 때 u를 곱하면 다음 두 동치인 방정식을 얻는다.

$$f(u) = 2 \iff u^2 - 2u - 2 = 0 \iff u = 1 \pm \sqrt{3},$$
$$f(u) = -2 \iff u^2 + 2u - 2 = 0 \iff u = -1 \pm \sqrt{3}.$$

$u > 0$인 가지. 양수인 근은 $u = -1 + \sqrt{3}$($f = -2$인 점)과 $u = 1 + \sqrt{3}$($f = 2$인 점)이다. f가 증가하므로 $-2 < f(u) < 2$는 정확히 $-1 + \sqrt{3} < u < 1 + \sqrt{3}$일 때, 즉 $-2 + \sqrt{3} < x < \sqrt{3}$일 때 성립한다.

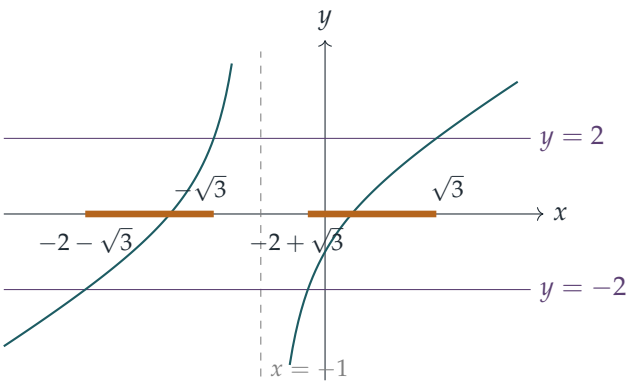
$u < 0$인 가지. 음수인 근은 $u = -1 - \sqrt{3}$($f = -2$인 점)과 $u = 1 - \sqrt{3}$($f = 2$인 점)이다. 이번에도 단조성(monotonicity)에 의해 $-2 < f(u) < 2$는 정확히 $-1 - \sqrt{3} < u < 1 - \sqrt{3}$일 때, 즉 $-2 - \sqrt{3} < x < -\sqrt{3}$일 때 성립한다.

어느 구간도 $x = -1$을 포함하지 않으므로($-\sqrt{3} < -1 < -2 + \sqrt{3}$임에 주의한다) 해집합은

$$\boxed{(-2 - \sqrt{3},\ -\sqrt{3}) \cup (-2 + \sqrt{3},\ \sqrt{3})}$$

이고, 문제에서 요구한 대로 모든 끝점이 $a + b\sqrt{3}$ 꼴이다. 끝점에서는 절댓값이 정확히 2가 되므로 끝점은 제외된다.

$y = x + (x-1)/(x+1)$의 그래프를 직선 $y = \pm 2$와 함께 그리면, 곡선이 두 직선 사이에 놓이는 두 구간(호박색)이 보인다.



소문항 (ii)

두 항을 하나의 코사인으로 합친다.

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$0 \le x \le \pi$이면 $\pi/4 \le x + \pi/4 \le 5\pi/4$이고, 코사인은 $[\pi/4, \pi/2)$에서 양수, $(\pi/2, 5\pi/4]$에서 음수이다. 따라서 $0 \le x \le \pi/4$에서는 $\cos x - \sin x \ge 0$이고,

$\pi/4 \le x \le \pi$에서는 ≤ 0이다. 적분을 $\pi/4$에서 나누고, $\cos x - \sin x$의 부정적분(antiderivative) 하나가 $\sin x + \cos x$임을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\cos x - \sin x|\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x - \int_{\pi/4}^{\pi} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} - \Big[\sin x + \cos x\Big]_{\pi/4}^{\pi} \\ &= (\sqrt{2} - 1) - (-1 - \sqrt{2}) \\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

검산

- (i)에서 몇 가지 값을 대입해 본다. $x = 0$에서 식의 값은 -1로 절댓값 조건을 만족하고, 실제로 $0 \in (-2 + \sqrt{3}, \sqrt{3})$이다. $x = -2$에서는 $-2 + 3 = 1$이고 $-2 \in (-2 - \sqrt{3}, -\sqrt{3})$이다. $x = -1.5$에서는 $-1.5 + 5 = 3.5$로 조건을 벗어나며, 실제로 $-1.5 \in (-\sqrt{3}, -1)$은 어느 구간에도 속하지 않는다.
- 촘촘한 격자와 $[-50, 50]$ 안의 임의의 점 2×10^5개에서 부등식을 확인한 결과는 모든 곳에서 두 구간과 일치했고, 네 끝점 모두에서 절댓값은 2이다.
- (ii)에서 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $2.828427\ldots$이 나와 $2\sqrt{2} \approx 2.828427$과 일치한다. 두 조각은 $\sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$와 $\sqrt{2} + 1 \approx 2.4142$이다. 타당성 점검으로, 피적분함수(integrand)는 최대 $\sqrt{2}$이므로 적분값은 최대 $\sqrt{2}\,\pi \approx 4.44$이다.

흔한 실수

- $x + \frac{x-1}{x+1} < 2$의 양변에 $x + 1$의 부호를 고려하지 않고 곱하는 것. 이렇게 하면 $x = -1$ 왼쪽의 구간을 잃거나 잘못 포함하게 된다.
- $f < 2$만 풀거나 $f > -2$만 푸는 것. 절댓값 부등식은 두 조건을 동시에 요구한다.
- (ii)에서 $\cos x - \sin x$를 $[0, \pi]$ 전체에서 그대로 적분하는 것. 그러면 -2가 나온다(절댓값의 적분이 음수로 나왔다면 위험 신호이다).

STEP 너머

(i)의 요령은 대수적 부등식을 단조함수(monotonic function)에 관한 명제로 바꾸는 것이다. f가 어떤 구간에서 순증가하면, $a < f(u) < b$는 정확히 $f = a$인 점과 $f = b$인 점 사이에서 성립한다. 이를 엄밀하게 증명하려면 대학 해석학(analysis) 강의에서 처음 배우는 큰 결과 중 하나인 사잇값 정리(intermediate value theorem)가 필요하며, $|x - a| < \varepsilon$과 같은

절댓값 부등식은 그 강의의 일상 언어이다. Abbott, *Understanding Analysis*는 이 두 가지를 모두 만나 볼 수 있는 친절한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.