풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 8

순수수학 • 적분방정식

STEP I 견본 문제지, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

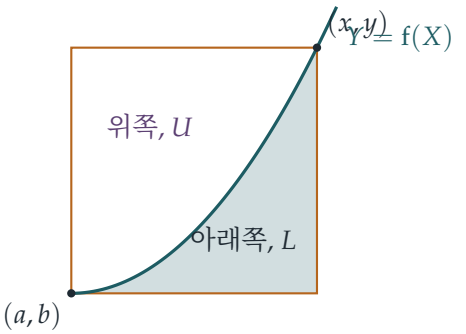
step.maths.org/questions/spec-s1-q8

핵심 아이디어

넓이 조건은 (x, y)의 **모든** 위치에 대하여 성립하므로, 이는 사실상 x에 대한 두 함수 사이의 등식이다. 한쪽은 f의 적분(integral)이고, 다른 쪽에는 $\mathrm{f}(x)$ 자체가 들어 있다. x에 대하여 미분하면 적분이 사라지고 일계 미분방정식(first-order differential equation)이 남는다. 이 방정식은 변수분리(separation of variables)로 풀 수 있고, 더 깔끔하게는 어떤 몫(quotient)의 도함수가 0이라는 식으로 바꿀 수 있다.

풀이

$\mathrm{f}'(x) \geq 0$이므로 곡선은 직사각형의 꼭짓점 (a, b)에서 마주 보는 꼭짓점 (x, y)까지 올라간다. 따라서 직사각형의 가로 길이는 $x - a$이고 세로 길이는 $y - b = \mathrm{f}(x) - b \geq 0$이다. 아래쪽 부분은 곡선과 아래 변 $Y = b$ 사이의 영역(아래 그림에서 색칠한 부분)이고, 위쪽 부분은 나머지 영역이다.



이제 x가 적분의 위끝이므로 적분변수로는 t를 쓰면

$$L = \int_a^x (\mathrm{f}(t) - b)\,\mathrm{d}t, \qquad L + U = (x-a)(\mathrm{f}(x) - b).$$

조건 $L = \frac{1}{2}U$는 $U = 2L$을 뜻하므로, 직사각형 전체의 넓이는 $3L$이다.

$$3\int_a^x (\mathrm{f}(t) - b)\,\mathrm{d}t = (x-a)(\mathrm{f}(x) - b) \qquad \text{모든} x \geq a. \tag{$*$}$$

생각해 보기 적분이 들어 있는 등식에서 어떻게 f에 대하여 풀 수 있는 식을 얻을 수 있을까?

$(*)$는 모든 $x \geq a$에 대하여 성립하므로 양변은 x에 대한 같은 함수이고, 따라서 도함수도 같다. 함수 f는 미분가능(differentiable)하므로(f′에 대한 정보가 주어져 있다) 연속(continuous)이고, 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)에 의하여 좌변의 도함수는 $3(\mathrm{f}(x) - b)$이다. 우변을 곱의 미분법(product rule)으로 미분하면

$$3(\mathrm{f}(x) - b) = (\mathrm{f}(x) - b) + (x-a)\,\mathrm{f}'(x),$$

즉

$$(x-a)\,\mathrm{f}'(x) = 2(\mathrm{f}(x) - b).$$

이 식을 정리하기 위해 $g(x) = \mathrm{f}(x) - b$, $u = x - a$로 놓으면 $g' = \mathrm{f}'$이고 방정식은 $u\,g' = 2g$가 된다. 변수를 분리하여 $g'/g = 2/u$로 쓸 수도 있지만, 이는 0이 될 수도 있는 g로 나누는 것이다. 그보다는 $x > a$일 때($u > 0$이므로) 다음이 성립함에 주목하는 편이 깔끔하다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{g}{u^2}\right) = \frac{u^2 g' - 2u\,g}{u^4} = \frac{u\,g' - 2g}{u^3} = 0.$$

따라서 g/u^2은 $x > a$에서 상수이고, 이 상수를 k라 하면

$$\mathrm{f}(x) - b = k(x-a)^2 \qquad (x > a),$$

이며, (a, b)가 곡선 위에 있으므로 이 식은 $x = a$에서도 성립한다. $x \geq a$일 때 $\mathrm{f}(x) \geq b$이므로(함수가 $\mathrm{f}(a) = b$에서 시작하여 감소하지 않는(non-decreasing) 함수이므로) $k \geq 0$이다. 또한 곡선이 수평선 $y = b$인 경우를 제외하면 $k > 0$인데, 이 예외적인 경우에는 모든 직사각형의 넓이가 0으로 줄어들어 조건이 아무 의미를 갖지 않는다.

따라서 곡선은 $x \geq a$에서 $y - b = k(x-a)^2$이다. 이는 축(axis)이 수직선 $x = a$이고 꼭짓점(vertex)이 (a, b)인 포물선(parabola)의 절반이다. $x \geq a$이므로 오른쪽 가지만 얻게 되고, 따라서 요구한 대로 이 곡선은 포물선의 호이다.

역으로, 이 곡선은 실제로 조건을 만족한다. $L = \int_a^x k(t-a)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}k(x-a)^3$이고, 직사각형의 넓이는 $(x-a)\cdot k(x-a)^2 = k(x-a)^3$이므로 $U = \frac{2}{3}k(x-a)^3 = 2L$이다.

검산

$a = b = 0, k = 1, x = 3$으로 놓자. 직사각형은 3×9이고 넓이는 27이며, $\int_0^3 t^2 \, \mathrm{d}t = 9$이므로 두 부분의 넓이는 9와 18, 비는 1 : 2이다. 더 일반적으로 $y - b = k(x - a)^p$에 대하여 아래쪽 대 위쪽의 넓이 비는 $1/p$이다($p = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3$에 대하여 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 수치적으로 확인하였다). 따라서 비 $\frac{1}{2}$은 $p = 2$를 골라낸다. 직선($p = 1$)은 당연히 직사각형을 똑같이 둘로 나눈다.

흔한 실수

- x를 적분의 끝과 적분변수로 동시에 사용하여 미분하는 단계를 헷갈리게 만드는 것.
- 두 부분을 바꾸어 $U = \frac{1}{2}L$로 놓는 것. 그러면 $(x - a)\mathrm{f}' = \frac{1}{2}(\mathrm{f} - b)$가 되어 곡선 $y - b = k\sqrt{x - a}$를 얻는데, 이는 **수평인** 축을 가지고 방향도 잘못된 포물선이다.
- 아무 언급 없이 $\mathrm{f}(x) - b$로 나누는 것. 위의 몫을 이용한 논증은 이 문제를 피한다.

STEP 너머

방정식 $(*)$는 **적분방정식**(*integral equation*)이다. 즉 미지의 함수가 적분 안에 들어 있다. 미분하여 이를 미분방정식으로 바꾸고, 원래의 방정식이 초기값(initial value)도 정해 준다는 사실을 기억하는 것이 표준적인 첫 단계이다. 답의 유일성(uniqueness)은 어떤 구간에서 도함수가 0인 함수는 상수라는 사실에 기대는데, 이는 평균값 정리(mean value theorem)의 결과이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 미적분학의 기본정리와 평균값 정리를 모두 꼼꼼하게 증명한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)는 $u\,g' = 2g$와 같은 방정식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.