풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 7

순수수학 • 복소 지수급수

STEP I 견본 문제지, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s1-q7

핵심 아이디어

$1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$를 보면 언제나 "반각(half-angle)" 인수 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$를 묶어 낸다. 그러면 남는 것은 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$이고, 이것은 실수이다. 급수에서는 이항계수(binomial coefficient) $\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}$가 이항정리(binomial theorem)를 떠올리게 한다. 그래서 각 사인을 지수함수의 허수부분(imaginary part)으로 쓰면, 합은 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$의 거듭제곱의 허수부분이 되고, 이것은 첫 번째 부분에서 이미 극형식(polar form)으로 나타내 두었다.

풀이

절댓값과 편각

인수 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$를 묶어 내면

$$\begin{aligned}1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}[(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)+(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)]\\ &= 2\cos\alpha\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.\end{aligned}$$

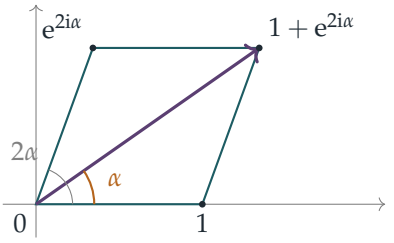
생각해 보기 이제 곧바로 "절댓값(modulus)은 $2\cos\alpha$, 편각(argument)은 α"라고 읽어 내면 될까? α에 대한 제한은 무엇 때문에 있는가?

$r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 꼴이 절댓값 r와 편각 θ를 주는 것은 $r>0$일 때뿐이다. 여기서는 $-\frac{1}{2}\pi<\alpha<\frac{1}{2}\pi$이므로 $\cos\alpha>0$이고, 이 범위는 주치 구간(principal interval) $(-\pi,\pi]$ 안에도 들어 있다. 따라서

$$|1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}|=2\cos\alpha,\qquad \arg(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})=\alpha.$$

(만약 $\cos\alpha$가 음수라면 절댓값은 $-2\cos\alpha$가 되고 편각은 π만큼 달라진다.)

멋진 기하학적 그림도 있다. 점 0, 1, $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$는 점 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$와 함께 한 변의 길이가 1인 마름모(rhombus)를 이룬다. 0에서 나가는 대각선(diagonal)은 각 2α를 이등분하고, 그 길이는 $2\cos\alpha$이다.



급수

실수 θ에 대하여 $\sin\theta = \operatorname{Im}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$이고 이항계수는 실수이므로

$$\begin{aligned} S &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\sin(2r+1)\alpha = \operatorname{Im}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha} \\ &= \operatorname{Im}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^r\right] = \operatorname{Im}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^n\right] \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^r$를 이용한 다음 이항정리를 적용하였다. 이제 드무아브르 정리(de Moivre's theorem) $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}$와 함께 첫 번째 부분의 결과를 이용하면

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,2^n\cos^n\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} = 2^n\cos^n\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}.$$

$2^n\cos^n\alpha$는 실수이므로 허수부분을 취하면

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\sin(2r+1)\alpha = 2^n\cos^n\alpha\,\sin(n+1)\alpha.}$$

인수분해 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} = 2\cos\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$는 **모든** 실수 α에 대하여 성립한다. $\cos\alpha > 0$이 필요했던 것은 절댓값과 편각을 말하기 위해서뿐이었으므로, 합의 공식은 주어진 범위만이 아니라 모든 실수 α에 대하여 성립한다.

검산

- $n=0$: 양변이 모두 $\sin\alpha$이다. $n=1$: 좌변은 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formula)에 의해 $\sin\alpha+\sin 3\alpha = 2\sin 2\alpha\cos\alpha$이고, 이것은 $2\cos\alpha\sin 2\alpha$와 일치한다.
- $n=3$, $\alpha=\frac{\pi}{6}$: 좌변은 $\frac{1}{2}+3+\frac{3}{2}-\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$이고, 우변은 $8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$이다.

- $\alpha = \frac{1}{2}\pi$: 모든 항이 $\sin(2r+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^r$이므로 $n \geq 1$일 때 합은 $(1-1)^n = 0$이고, 이것은 $\cos\frac{\pi}{2} = 0$과 일치한다.
- $0 \leq n \leq 24$에 대하여 임의의 α 값에서 공식이 성립함을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- α의 범위 때문에 양수가 된다는 점을 언급하지 않고 절댓값을 $2\cos\alpha$라고 쓰는 것. 절댓값은 음수일 수 없다.
- 허수부분을 너무 일찍 취하는 것. $\operatorname{Im}(zw) \neq \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w$이므로 마지막 순간까지 모든 것을 복소수로 유지해야 한다.
- $e^{i(2r+1)\alpha}$를 $\left(e^{2i\alpha}\right)^r$로 쓰면서 추가 인수 $e^{i\alpha}$를 빠뜨리는 것. 그러면 $\sin(n+1)\alpha$가 $\sin n\alpha$로 바뀌어 버린다.

STEP 너머

$\sum \binom{n}{r} e^{ir\theta}$를 닫힌 형태(closed form)로 구하는 같은 아이디어가 푸리에 해석(Fourier analysis)에도 등장한다. 그곳에서는 $\cos^n$ 꼴의 식을 여러 배각의 합으로 전개하거나 거꾸로 그런 합을 하나로 모으며, 이항 가중치 $\binom{n}{r}/2^n$은 이항분포(binomial distribution)가 된다. 반각을 묶어 내는 것은 또한 $1 - e^{i\theta}$의 절댓값을 구하는 표준적인 방법이기도 한데, 이것은 등비급수(geometric series)와 1의 거듭제곱근(roots of unity)에서 만나게 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 마름모 그림을 포함하여 이러한 계산의 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.