풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 6

순수수학 • 활꼴의 넓이

> **STEP I 견본 문제지, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q6

핵심 아이디어

이 동전은 정칠각형(regular heptagon)의 각 변 바깥으로 원 모양의 "뚜껑"이 볼록하게 붙어 있는 도형이다. 따라서 그 넓이는 정칠각형의 넓이에 활꼴(circular segment) 일곱 개의 넓이를 더한 것이고, 활꼴 하나는 부채꼴(sector)에서 삼각형을 뺀 것이다. 그러면 모든 것이 두 각으로 귀결된다. 하나는 각 호가 그 중심에서 이루는 각(원주각 정리(inscribed angle theorem)로 곧바로 구할 수 있다)이고, 다른 하나는 정칠각형의 긴 대각선(diagonal)과 외접원(circumcircle)의 반지름이 이루는 각이다.

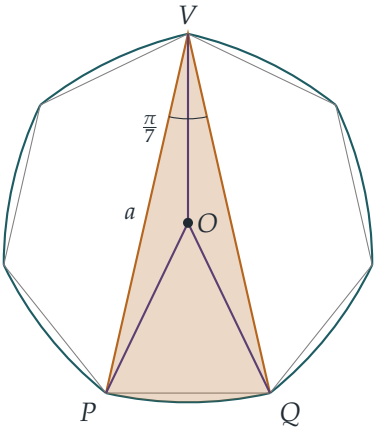
풀이

도형의 모양

각 꼭짓점은 자신의 맞은편에 있는 호의 두 끝점으로부터 거리 a만큼 떨어져 있다(두 끝점 모두 그 꼭짓점을 중심으로 하는 반지름 a인 원 위에 있기 때문이다). 따라서 한 꼭짓점과 세 자리 건너의 꼭짓점을 잇는 일곱 개의 "긴" 대각선은 모두 길이가 a이다. 반지름이 같은 원에서 같은 호는 중심에서 같은 각을 이루므로, 일곱 개의 변(호의 현(chord))도 모두 길이가 같다.

긴 대각선들을 차례로 이으면 모든 변의 길이가 a인 칠각 별 모양이 생긴다. 별의 각 꼭짓점에서의 각은 그 꼭짓점에서 나가는 두 대각선 사이의 각이고, 이 두 대각선과 맞은편 변은 세 변의 길이가 a, a와 공통의 변의 길이인 삼각형을 이룬다. 이러한 삼각형 일곱 개는 모두 합동(congruent)이므로, 이 별은 등변(equilateral)일 뿐 아니라 등각(equiangular)이기도 하며, 따라서 정다각형 별이다. 그러므로 일곱 꼭짓점은 정칠각형의 꼭짓점이다. 이 정칠각형의 중심을 O, 외접원의 반지름을 R라 하자.

한 꼭짓점을 V라 하고, V를 중심으로 하는 호의 두 끝점을 P와 Q라 하자. P와 Q는 정칠각형의 이웃한 두 꼭짓점이다.



각 호의 중심각

변 PQ는 중심 O에서 각 $2\pi/7$을 이룬다. V는 외접원 위, 우호(major arc) PQ 위에 있으므로 원주각 정리에 의해

$$\angle PVQ = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{7} = \frac{\pi}{7}.$$

따라서 각 호는 반지름이 a인 원의 일부로서 그 중심에서 각 $\pi/7$을 이루고, (색칠된) 부채꼴 VPQ의 넓이는

$$\tfrac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\pi}{7} = \frac{\pi a^2}{14}.$$

넓이 합하기

동전의 면은 정칠각형과 각 변에 하나씩 붙은 활꼴 일곱 개로 이루어진다. 정칠각형은 OPQ와 같은 삼각형 일곱 개로 나뉘고, PQ 위의 활꼴은 부채꼴 VPQ에서 삼각형 VPQ를 뺀 것이다. 따라서

$$\begin{aligned} \text{넓이} &= 7\,[OPQ] + 7(\text{부채꼴}VPQ - [VPQ]) \\ &= \frac{\pi a^2}{2} - 7([VPQ] - [OPQ]), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $[\cdot]$는 넓이를 나타낸다.

생각해 보기 두 삼각형의 넓이를 각각 따로 구하지 않고 $[VPQ] - [OPQ]$를 구하려면 어떻게 해야 할까?

중심 O는 삼각형 VPQ의 내부, 그 대칭축 위에 있으므로, 삼각형 VPQ에서 삼각형 OPQ를 제거하면 합동인 두 삼각형 OVP와 OVQ가 남는다.

$$[VPQ] - [OPQ] = [OVP] + [OVQ] = 2 \cdot \tfrac{1}{2} R\, a \sin \angle OVP.$$

대칭성에 의해 VO는 $\angle PVQ$를 이등분하므로 $\angle OVP = \pi/14$이다. 삼각형 OVP는 $OV = OP = R$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로 두 밑각이 모두 $\pi/14$이고, O에서 VP에 수선(perpendicular)을 내리면

$$a = VP = 2R\cos\frac{\pi}{14}, \qquad \text{따라서} \qquad R = \frac{a}{2\cos(\pi/14)}.$$

그러므로

$$[VPQ] - [OPQ] = R\, a \sin\frac{\pi}{14} = \frac{a^2 \sin(\pi/14)}{2\cos(\pi/14)} = \frac{a^2}{2}\tan\frac{\pi}{14},$$

이고

$$\text{넓이} = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{7a^2}{2}\tan\frac{\pi}{14} = \frac{a^2}{2}\left(\pi - 7\tan\frac{\pi}{14}\right),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

검산

- 수치로 계산하면 $\frac{1}{2}(\pi - 7\tan\frac{\pi}{14}) \approx 0.7719$이므로 넓이는 약 $0.772a^2$이다. 일곱 개의 호 위에서 점을 촘촘하게 뽑아 신발끈 공식(shoelace formula)을 적용하면 소수점 아래 여섯째 자리까지 일치하며, 몬테카를로(Monte Carlo) 추정값도 마찬가지이다(어떤 점이 동전 안에 있을 필요충분조건은 그 점이 일곱 꼭짓점 모두로부터 거리 a 이내에 있는 것이다).
- 이 동전은 지름이 a인 원판처럼 모든 방향으로 폭이 a이고, 그 원판의 넓이는 $\pi a^2/4 \approx 0.785a^2$이다. 폭이 일정하게 a인 모든 도형 가운데 원판의 넓이가 가장 크므로 그보다 조금 작을 것으로 예상되며, 실제로 $0.772a^2 < 0.785a^2$이다.
- 같은 논법을 뢸로(Reuleaux) n각형(n은 홀수)에 적용하면 $\frac{a^2}{2}(\pi - n\tan\frac{\pi}{2n})$을 얻는다. $n \to \infty$일 때 $n\tan\frac{\pi}{2n} \to \frac{\pi}{2}$이므로 넓이는 원판의 넓이 $\pi a^2/4$로 수렴(converge)한다. $n = 3$이면 잘 알려진 뢸로 삼각형(Reuleaux triangle)의 넓이 $\frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})a^2$이 나온다.

흔한 실수

- 호의 각을 $\pi/7$(호의 중심이 실제로 있는 맞은편 꼭짓점에서의 각)이 아니라 $2\pi/7$(중심 O에서의 각)로 잡는 실수.
- a를 외접원의 반지름 R와 혼동하는 실수. a는 긴 대각선이며 $a = 2R\cos(\pi/14)$이다.

STEP 너머

50펜스(50p) 동전은 **정폭 곡선**(curve of constant width)이다. 즉 평행한 두 접선(tangent line)의 쌍은 어느 것이든 그 사이의 거리가 똑같이 a이며, 그래서 동전 투입구는 동전이 어떻게 돌아가 있든 같은 방식으로 그 크기를 잴 수 있다. 바르비에 정리(Barbier's theorem)에 따르면 이러한 곡선은 모두 둘레가 πa이고(여기서는 $7 \cdot a \cdot \pi/7$), 블라슈케-르베그 정리(Blaschke–Lebesgue theorem)에 따르면 그중 넓이가 가장 작은 것은 뢸로 삼각형이다. 이런 기하학을 더 알고 싶다면 쿠란트(Courant)와 로빈스(Robbins)의 *What Is Mathematics?*(수학이란 무엇인가)에 정폭 곡선을 다룬 멋진 절이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.