풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 5

순수수학 • 자릿수와 계승

STEP I 견본 문제지, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s1-q5

핵심 아이디어

두 소문항 모두 계산보다는 신중하게 세는 것이 핵심이다. (i)에서는 먼저 한 자리 수, 두 자리 수, 세 자리 수로 묶어 자릿수를 세어 1000번째 숫자가 정확히 어디에 오는지 찾은 다음, 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리 순으로 자리마다 7의 개수를 센다. (ii)에서는 끝자리 0(trailing zero) 하나하나가 $10 = 2 \times 5$라는 인수에 해당하고, 5가 2보다 드물므로 365!에 들어 있는 인수 5의 개수만 세면 된다.

풀이

소문항 (i)

어디에서 멈추는가? 1부터 9까지의 수는 9개의 숫자를 쓴다. 두 자리 수 10부터 99까지 90개는 180개의 숫자를 쓰므로 지금까지 189개이다. 남은 숫자는

$$1000 - 189 = 811 = 3 \times 270 + 1$$

개이다. 처음 270개의 세 자리 수는 $100, 101, \ldots, 369$이고, 이들은 810개의 숫자를 쓴다. 마지막 숫자는 370의 첫째 숫자인 3이다. 따라서 $1, 2, \ldots, 369$를 모두 빠짐없이 쓴 뒤 3 하나를 더 쓴 것이다.

? **생각해 보기** 370에는 7이 들어 있다. 이것도 세어야 할까?

그렇지 않다. 첫째 숫자인 3을 쓴 뒤 멈추므로 7은 결코 쓰이지 않는다. 바로 이 때문에 멈추는 지점을 숫자 하나 단위까지 정확히 확정해야 한다.

1부터 369까지에서 7 세기. 자릿값(place value)별로 센다. 각각의 7은 정확히 한 자리에만 있으므로 중복해서 세는 일이 없고, 77 같은 수는 올바르게 두 번 세어진다.

- **일의 자리.** 열 개씩 이루어진 완전한 묶음 $10k, \ldots, 10k+9$마다 7로 끝나는 수가 정확히 하나 있다. 0부터 359까지의 수는 완전한 묶음 36개를 이루므로 7이 36개 나온다: $7, 17, \ldots, 357$. 불완전한 묶음 360부터 369까지에서 367 하나가 더해진다. 합계: 37.
- **십의 자리.** 완전한 백 단위마다 십의 자리가 7인 수가 정확히 열 개 있다: 70–79, 170–179, 270–279. 묶음 370–379는 369를 넘어선다. 합계: 30.
- **백의 자리.** 369 이하의 모든 수는 백의 자리가 많아야 3이다(또는 백의 자리가 아예 없다). 합계: 0.

마지막에 홀로 쓴 3은 아무것도 더하지 않는다. 따라서 숫자 7은

$$37 + 30 + 0 = 67 \text{ 번 쓰인다.}$$

소문항 (ii)

10진법에서 N의 끝자리 0의 개수는 $10^k \mid N$을 만족하는 가장 큰 k이다. $10 = 2 \times 5$이므로, 이는 N의 소인수분해(prime factorisation)에서 2의 지수와 5의 지수 중 작은 쪽이다.

5 세기. 365!을 나누는 5의 거듭제곱의 지수는 $j = 1, \ldots, 365$에 대하여 j에 들어 있는 인수 5의 개수를 모두 더한 것이다. 5의 배수는 인수를 적어도 하나, 25의 배수는 두 번째 인수를, 125의 배수는 세 번째 인수를 제공하며, 이런 식으로 계속된다. 각 층을 따로 세면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \tfrac{365}{5} \right\rfloor &= 73 && (5\text{의 배수}),\\
\left\lfloor \tfrac{365}{25} \right\rfloor &= 14 && (25\text{의 배수}),\\
\left\lfloor \tfrac{365}{125} \right\rfloor &= 2 && (125\text{의 배수: } 125, 250),\\
\left\lfloor \tfrac{365}{625} \right\rfloor &= 0.
\end{aligned}$$

정확히 5^m으로 나누어떨어지는 수는 처음 m개의 줄에서 한 번씩 세어지므로, 마땅히 그래야 하듯 정확히 m만큼 기여한다. 그러므로 365!에 들어 있는 5의 지수는

$$73 + 14 + 2 = 89.$$

2는 병목이 아니다. 2에 대해 같은 논법을 적용하면 인수 2가 적어도 $\lfloor 365/2 \rfloor = 182 > 89$개 있다. (실제로는 $182 + 91 + 45 + 22 + 11 + 5 + 2 + 1 = 359$개이다.) 따라서 $2^{89} \cdot 5^{89} = 10^{89}$은 365!을 나누지만, $5^{90} \nmid 365!$이므로 10^{90}은 나누지 않는다.

따라서 365!은 정확히 **89**개의 0으로 끝난다.

검산

(i)에서 멈추는 지점을 빠르게 확인해 보자: $9 + 180 + 3 \times 270 = 999$개의 숫자로 369의 끝까지 가고, 그다음 숫자는 370의 맨 앞자리 3이다. 컴퓨터로 처음 1000개의 숫자를 써서 세어 보면 7이 67개임이 확인되며, 그중 20개는 1–99에, 47개는 100–369에 있다. (ii)에서는 365!을 정확히 계산하고(779자리 수이다) 끝자리 0의 개수를 세어 보면 된다. 89개로, 5의 개수와 일치한다. 손으로 방법을 시험해 볼 작은 예: 25!는 $\lfloor 25/5 \rfloor + \lfloor 25/25 \rfloor = 6$개의 0으로 끝나야 하는데, 실제로 $25! = 15\,511\,210\,043\,330\,985\,984\,000\,000$이다.

흔한 실수

- 370(심지어 371–379까지)을 쓴 것으로 세어 68 이상을 얻는 실수.
- $\lfloor 365/5 \rfloor = 73$만 사용하고, 25, 50, ... 에는 5가 두 개, 125, 250에는 세 개 들어 있다는 사실을 잊는 실수.
- 7을 숫자 단위가 아니라 수 단위로 세어, 77, 177, 277을 두 번이 아니라 한 번만 세는 실수.

STEP 너머

(ii)에서 층별로 센 방법은 르장드르의 공식(Legendre's formula)이다: $n!$에 들어 있는 소수 p의 지수는 $\sum_{k \geq 1} \lfloor n/p^k \rfloor$이며, 이는 $(n - s_p(n))/(p-1)$과도 같다. 여기서 $s_p(n)$은 n을 p진법으로 나타냈을 때 각 자리 숫자의 합이다. 이 경우 $365 = 2430_5$이고 자리 숫자의 합은 9이며, $(365 - 9)/4 = 89$이다. 이 공식은 이항계수(binomial coefficient)의 소인수에 관한 쿰머(Kummer)의 정리의 바탕이 된다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이런 종류의 초등 정수론(elementary number theory)을 더 깊이 탐구하기에 아주 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.