풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 4

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 견본 문제지, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q4

핵심 아이디어

이차식의 제곱근이 나타나면 먼저 완전제곱식(completing the square)으로 고친다. 여기서는 근호 안의 이차식이 $(x+1)^2-3$이 되고, 근호 밖의 인수도 $x+1$이므로, $u=x+1$로 평행이동하면 $\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-3}}$이라는 깔끔한 꼴이 남는다. 이 모양(변수에 그 변수의 제곱에서 상수를 뺀 것의 제곱근을 곱한 꼴)은 바로 시컨트 치환(secant substitution), 또는 마찬가지로 역수 치환(reciprocal substitution) $t=1/u$가 다루기 위해 만들어진 형태이다. 어느 치환을 쓰든 무한 구간이 유한 구간으로 바뀐다는 장점도 있다.

풀이

완전제곱식 만들기

다음이 성립한다.

$$x^2+2x-2=(x+1)^2-3,$$

$x\geq 1$이면 $(x+1)^2\geq 4>3$이므로 이 식은 양수이고, 따라서 피적분함수(integrand)는 $[1,\infty)$ 전체에서 정의된다. $u=x+1$로 놓으면 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$이고, $x=1$일 때 $u=2$, $x\to\infty$일 때 $u\to\infty$이다:

$$I=\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-2}}=\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-3}}.$$

u가 클 때 피적분함수는 $1/u^2$처럼 행동하므로 이 적분은 수렴(converge)한다.

시컨트 치환

$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$에 대하여 $u = \sqrt{3}\sec\theta$로 놓는다. 그러면

$$\mathrm{d}u = \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta, \qquad \sqrt{u^2-3} = \sqrt{3(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{3}\tan\theta,$$

이다. 여기서 이 범위에서 $\tan\theta \ge 0$임을 이용하여 절댓값 기호를 없앴다.

? **생각해 보기** 새로운 적분 구간의 끝값은 무엇인가?

$u = 2$에서는 $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 즉 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$이어야 하므로 $\theta = \frac{\pi}{6}$이다. $u \to \infty$일 때 $\sec\theta \to \infty$이므로 아래쪽에서 $\theta \to \frac{\pi}{2}$이다. 이 치환은 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$에서 증가하므로 적분 구간의 끝값의 순서가 그대로 유지된다.

이제 모든 것이 약분된다:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{3}\sec\theta\cdot\sqrt{3}\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

따라서

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

다른 방법: 역수 치환

시컨트가 떠오르지 않는다면 $t = 1/u$로 치환해도 똑같이 잘 되며, 적분 구간도 곧바로 유한해진다. $u = 1/t$이면 $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t/t^2$이고, $t > 0$일 때

$$u\sqrt{u^2-3} = \frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-3t^2}}{t} = \frac{\sqrt{1-3t^2}}{t^2}.$$

이다. 끝값 $u = 2$와 $u \to \infty$는 각각 $t = \frac{1}{2}$와 $t \to 0$이 되고, 음의 부호 때문에 끝값의 순서가 뒤바뀐다:

$$I = \int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-3t^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}\,t)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3},$$

이는 첫 번째 방법의 결과와 일치한다.

검산

- 원시함수(antiderivative) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$를 미분하면 피적분함수가 다시 나온다. 그러면 $F(\infty) - F(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$이다.

- 대략적인 크기 확인: $[1,\infty)$에서 피적분함수는 $1/(x+1)^2$보다 조금 크고, 이 함수의 적분값은 $\frac{1}{2}$이다. 구한 답은 $\pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$으로 $\frac{1}{2}$보다 약간 크므로, 예상한 대로이다.
- 원래 적분을 수치적분(numerical quadrature)으로 계산하면(구간을 나누고 무한한 꼬리 부분은 $x = 1/w$로 바꾸어 처리하면) 0.604600을 얻으며, 이는 $\pi/(3\sqrt{3}) = 0.6045998\ldots$과 일치한다.

흔한 실수

- 적분 구간의 끝값을 바꾸는 것을 잊는 실수: 아래끝은 0이 아니라 $\theta = \frac{\pi}{6}$이다. 0을 쓰면 틀린 답 $\pi/(2\sqrt{3})$이 나온다.
- 사용하는 범위에서 $\tan\theta$의 부호를 확인하지 않고 $\sqrt{\sec^2\theta - 1} = \tan\theta$라고 쓰는 실수.
- 극한을 제대로 취하지 않고 $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsec}(\ldots)$에 "무한대를 대입"한 채로 답을 남겨 두는 실수.

STEP 너머

이것은 이상적분(improper integral)이다. 엄밀하게는 $\lim_{X\to\infty}\int_1^X$를 뜻하며, 대학 1학년 해석학 강의에서는 이러한 극한이 언제 존재하는지를 엄밀하게 다룬다($\int^\infty u^{-2}\,\mathrm{d}u$와 비교하는 것이 표준적인 판정법이다). 여기서 쓴 치환들은 유리함수 R에 대하여 $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$를 적분하는 일반 이론의 출발점이기도 하며, 이러한 적분은 언제나 유리함수(rational function)의 적분으로 바꿀 수 있다. 이상적분과 비교판정법(comparison test)에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.