풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 3

순수수학 • 2계 미분방정식

STEP I 견본 문제지, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s1-q3

핵심 아이디어

2계(second-order) 방정식은 어렵지만, 1계(first-order) 방정식 두 개는 쉽다. 제시된 치환(substitution) $z = y' - y$(y'는 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$를 나타낸다)는 좌변이 z와 z'만으로 이루어진 식으로 정리되도록 고른 것이다. 그러면 z에 대한 1계 선형 방정식(first-order linear equation)이 남고, 이어서 y에 대한 또 하나의 1계 선형 방정식이 남는다. 두 방정식 모두 적분인자(integrating factor)로 풀린다.

풀이

계수 낮추기

$z = y' - y$로 놓으면 $z' = y'' - y'$이다. 이에 맞추어 방정식의 좌변을 나눈다.

$$y'' + 2y' - 3y = (y'' - y') + 3(y' - y) = z' + 3z.$$

따라서 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 3z = 2\mathrm{e}^x.$$

초기 조건(initial conditions)으로부터 $z(0) = y'(0) - y(0) = 2 - 1 = 1$이다.

? **생각해 보기** $(y'' - y') + 3(y' - y)$로 나누는 방법을 어떻게 알아낼 수 있었을까?

어떤 상수 k에 대하여 $y'' + 2y' - 3y$가 $z' + kz = y'' + (k-1)y' - ky$와 같아야 한다. y' 항을 비교하면 $k = 3$이고, 이때 $-ky = -3y$도 맞아떨어진다. (이것이 가능한 까닭은 1이 특성방정식(auxiliary equation) $m^2 + 2m - 3 = (m-1)(m+3) = 0$의 근이기 때문이다. 다른 근 -3이 $z' + 3z$에 나타나는 것이다.)

z 구하기

적분인자 e^{3x}를 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z\mathrm{e}^{3x}) = 2\mathrm{e}^{4x} \quad \Longrightarrow \quad z\mathrm{e}^{3x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4x} + A.$$

$x = 0$에서 $1 = \frac{1}{2} + A$이므로 $A = \frac{1}{2}$이고

$$z = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}).$$

y 구하기

이제 $y' - y = z$, 즉

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}).$$

적분인자는 e^{-x}이다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{-x}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x},$$

$$y\mathrm{e}^{-x} = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-4x} + B.$$

$x = 0$에서 $1 = -\frac{1}{8} + B$이므로 $B = \frac{9}{8}$이다. 양변에 e^{x}를 곱하면

$$\boxed{y = \left(\frac{x}{2} + \frac{9}{8}\right)\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3x} = \frac{(4x+9)\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-3x}}{8}}$$

여기서는 $y(0) = 1$만 사용했다는 점에 주목하자. 조건 $y'(0) = 2$는 $z(0)$을 구할 때 이미 사용했으므로, 두 조건이 모두 적용된 것이다.

검산

- $y(0) = (9-1)/8 = 1$이고, $y' = \big((4x+13)\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-3x}\big)/8$에서 $y'(0) = 16/8 = 2$이다.
- 대입해 보면 e^{-3x}는 제차 방정식(homogeneous equation)의 해이고$(9 - 6 - 3 = 0)$, e^{x}도 마찬가지이다$(1 + 2 - 3 = 0)$. $x\mathrm{e}^{x}$에 대해서는 $y'' + 2y' - 3y = (x+2) + 2(x+1) - 3x = 4$에 e^{x}를 곱한 값이 되므로, $\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x}$는 정확히 $2\mathrm{e}^{x}$를 만들어 낸다.
- 수치적으로, 룽게-쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 원래 방정식을 $x = 0$에서부터 단계적으로 계산하면 $y(1) \approx 4.41098$을 얻으며, 이는 $(13\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-3})/8$과 일치한다.

흔한 실수

- 마지막에 $y'(0) = 2$를 한 번 더 적용하거나, 이 조건을 $z(0) = 1$로 바꾸는 것을 잊는 실수.

- 치환을 쓰지 않고 "다른 방법으로" 특수해(particular integral) $c\,\mathrm{e}^x$를 시도하는 실수. e^x가 이미 제차 방정식의 해이므로 이 시도는 실패하며, 대신 $cx\mathrm{e}^x$가 필요하다. 치환을 쓰면 이 문제가 저절로 처리된다.

STEP 너머

이 치환은 사실 미분 연산자(differential operator)의 인수분해(factorisation)이다. $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$를 D로 나타내면 방정식은 $(D+3)(D-1)y = 2\mathrm{e}^x$이고, $z = (D-1)y$이다. 이런 식으로 연산자를 인수분해하면 상수 계수 선형 방정식(constant-coefficient linear equations)의 이론 전체를 설명할 수 있으며, 중근(repeated root)이나 "공명(resonant)"하는 근이 왜 x라는 추가 인수를 만들어 내는지도 알 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 이를 체계적으로 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.