풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 2

순수수학 • 삼각함수와 최적화

STEP I 견본 문제지, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s1-q2

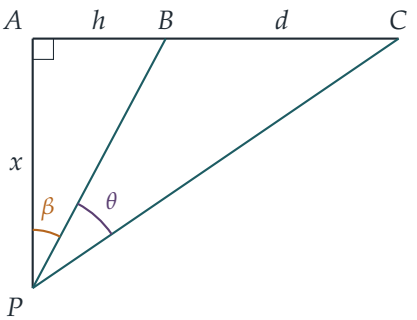
핵심 아이디어

각 θ는 P에서의 두 각의 차이고, 두 각은 각각 A에서 직각인 직각삼각형 안에 놓여 있다. 이 두 각의 탄젠트는 그림에서 바로 읽을 수 있으므로, tan의 뺄셈 공식(subtraction formula)이 일을 해 준다. 최댓값을 구할 때는 x가 한 곳에만 나타나도록 $\tan\theta$를 $x + (\text{상수})/x$ 꼴로 쓰면, 미적분 없이 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)으로 마무리할 수 있다.

풀이

$\tan\theta$ 구하기

$\alpha = \angle APC$, $\beta = \angle APB$라 하자. B가 A와 C 사이에 있으므로 $\theta = \alpha - \beta$이다.



직각삼각형 PAC와 PAB(직각은 A)에서

$$\tan\alpha = \frac{AC}{AP} = \frac{h+d}{x}, \qquad \tan\beta = \frac{AB}{AP} = \frac{h}{x}.$$

뺄셈 공식에 의해

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{h+d}{x} - \dfrac{h}{x}}{1+\dfrac{h(h+d)}{x^2}}.$$

분자와 분모에 x^2을 곱하면

$$\boxed{\tan\theta = \frac{dx}{x^2+h(h+d)}}$$

이다. (분모 $1+\tan\alpha\tan\beta$는 양수이므로 이 공식은 언제나 성립한다.)

θ를 최대로 하기

생각해 보기 $\tan\theta$를 최대로 하는 것은 θ를 최대로 하는 것과 같은가?

여기서는 그렇다. α와 β는 모두 0과 $\frac{\pi}{2}$ 사이에 엄격히 놓여 있고 $\alpha > \beta$이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다. 이 구간에서 tan는 순증가(strictly increasing)하므로, 가장 큰 θ는 가장 큰 $\tan\theta$에서 나온다.

분자와 분모를 $x > 0$으로 나누면

$$\tan\theta = \frac{d}{x+\dfrac{h(h+d)}{x}}.$$

이제 d는 고정되어 있으므로, $\tan\theta$는 분모 $x+h(h+d)/x$가 가장 작을 때 가장 크다. 두 항이 모두 양수이므로 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$x+\frac{h(h+d)}{x} \;\geq\; 2\sqrt{x\cdot\frac{h(h+d)}{x}} = 2\sqrt{h(h+d)},$$

이고, 등호는 두 항이 같을 때, 즉 $x = h(h+d)/x$, 다시 말해 $x^2 = h(h+d)$일 때 정확히 성립한다. 따라서 분모는 최솟값을, θ는 최댓값을

$$\boxed{x = \sqrt{h(h+d)}}$$

에서 가지며, 이때 $\tan\theta = \dfrac{d}{2\sqrt{h(h+d)}}$이다.

미적분으로 풀 수도 있다. $k = h(h+d)$, $f(x) = dx/(x^2+k)$라 쓰면, 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$f'(x) = \frac{d\,(k-x^2)}{(x^2+k)^2},$$

이다. 이는 $0 < x < \sqrt{k}$에서 양수이고 $x > \sqrt{k}$에서 음수이므로, f는 증가하다가 $x = \sqrt{k}$에서 유일한 최댓값에 이른 뒤 감소한다. 산술-기하 평균 부등식이 더 빠르고, 최댓값이 전역 최댓값(global maximum)임을 분명하게 보여 준다.

검산

- 극한: $x \to 0$ 또는 $x \to \infty$일 때 공식은 $\tan\theta \to 0$을 준다. 이는 옳다. A에 아주 가까이에서 보거나 아주 멀리서 보면, 선분 BC가 P에서 이루는 각은 거의 없다. 따라서 그 사이 어딘가에 최댓값이 있어야 한다.
- 대칭성: x를 $h(h+d)/x$로 바꾸어도 $\tan\theta$는 변하지 않으므로, 최댓값은 이 맞바꿈의 고정점 $x = \sqrt{h(h+d)}$에 있어야 한다. $h = 2$, $d = 1$일 때 점 $x = 2$와 $x = 3$은 같은 각(약 11.31°)을 주고, $x = \sqrt{6}$에서의 최댓값은 약 11.54°이다.
- $h = 1$, $d = 3$이면 $x = 2$이고 $\tan\theta = 6/8 = \frac{3}{4}$로, 3–4–5 삼각형의 각인 36.87°이다. 무작위로 고른 20 000개의 (h, d, x)에 대해 좌표로부터 θ를 직접 계산한 값은 공식과 10^{-14}까지 일치했고, 최댓값을 주는 x를 수치적으로 찾은 결과도 매번 $\sqrt{h(h+d)}$와 일치했다.

흔한 실수

- 마치 θ가 직각삼각형 안에 있는 것처럼 $\tan\theta = d/x$라고 쓰는 것. 그렇지 않다. 직각은 BC 위가 아니라 A에 있다.
- $\tan\theta$를 최대로 하면서 그것이 왜 θ를 최대로 하는지 설명하지 않는 것. 이를 위해서는 θ가 tan가 증가하는 구간 안에 머물러야 한다.

STEP 너머

이 답에는 아름다운 기하학적 해석이 있다. BC가 일정한 각을 이루어 보이는 점들은 B와 C를 지나는 원의 호 위에 놓인다. 가장 큰 각은 직선 AP와 여전히 만나는 그러한 원 가운데 가장 작은 원, 즉 P에서 그 직선에 **접하는** 원 위에서 얻어진다. 그러면 할선-접선 정리(tangent–secant theorem, 점 A의 방멱(power of a point))에 의해 $AP^2 = AB \cdot AC$이고, 이것이 바로 $x^2 = h(h+d)$이다. 이것은 레기오몬타누스(Regiomontanus)의 문제로, 흔히 "받침대 위의 조각상을 가장 잘 보려면 어디에 서야 하는가?"라는 형태로 제시된다. 어떤 양을 최적화할 때, 다루기는 더 쉬우면서 함께 증가하고 감소하는 다른 양으로 먼저 바꾸는 것은 대학 1학년 해석학 전반에 흐르는 주제이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에는 이런 정신의 문제가 훨씬 더 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.