풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 14

확률과 통계 • 기댓값

STEP I 견본 문제지, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s1-q14

핵심 아이디어

모든 것은 표 하나에 달려 있다. 바로 공정한 사면체 주사위 두 개의 눈의 합의 분포(distribution)이다. 이 표만 있으면 어떤 추측값 x에 대해서든 기대 이득(expected gain)은 그저 "상금 곱하기 이길 확률, 빼기 벌금 곱하기 질 확률"이다. 흥미로운 긴장 관계는 큰 수를 추측하면 상금은 크지만 이길 확률이 작다는 데 있으므로, 모든 경우를 비교해 보기 전까지는 최선의 추측이 무엇인지 분명하지 않다.

풀이

S를 눈의 합이라 하자. 각 주사위는 $1,2,3,4$가 각각 확률 $\frac{1}{4}$로, 서로 독립적으로(independently) 나오므로 16개의 순서쌍은 모두 같은 확률로 나타난다. 각 합을 만드는 순서쌍의 개수를 세면 다음을 얻는다.

s	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{P}(S=s)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

(예를 들어 $S=5$는 $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$에서 나온다.)

B가 x를 추측하고 $p=\mathrm{P}(S=x)$라 하면, 펜스(pence) 단위의 이득 G는 확률 p로 $100x^2$이고 확률 $1-p$로 $-50x$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(G) &= 100x^2p - 50x(1-p)\\ &= 50x[(2x+1)p-1].\end{aligned}$$

x를 만드는 방법의 수를 k라 하여 $p=\frac{k}{16}$로 쓰면

$$\mathrm{E}(G)=\frac{25x[k(2x+1)-16]}{8}.$$

소문항 (i)

합이 8이 되는 것은 $(4,4)$뿐이므로 $p = \frac{1}{16}$이고

$$\mathrm{E}(G) = 6400 \cdot \frac{1}{16} - 400 \cdot \frac{15}{16} = 400 - 375 = 25,$$

이다. 따라서 8을 추측할 때 B의 기대 이득은 요구한 대로 25펜스이다.

소문항 (ii)

$2, 3, \ldots, 8$ 밖의 수를 추측하면 결코 이길 수 없으므로 (점수는 양수여야 하므로 x를 양수로 보면) 돈을 잃기만 한다. 가능한 일곱 가지 합에 대해 위의 공식으로 계산하면 다음과 같다.

x	2	3	4	5	6	7	8
k	1	2	3	4	3	2	1
$\mathrm{E}(G)$ (펜스)	−68.75	−18.75	137.5	437.5	431.25	306.25	25

예를 들어 $x = 5$일 때 $\mathrm{E}(G) = \frac{25 \cdot 5\,(4 \cdot 11 - 16)}{8} = \frac{125 \cdot 28}{8} = 437.5$이다.

> **생각해 보기** 상금은 x^2처럼 커지는데, 왜 7이나 8 같은 큰 수를 추측하는 것이 최선이 아닐까?

상금은 실제로 빠르게 커지지만, 이길 확률은 5를 중심으로 양쪽으로 갈수록 줄어들고, 벌금은 훨씬 더 일어나기 쉬운 사건인 틀리는 경우에 치러야 한다. $x = 8$에서는 확률이 $\frac{1}{16}$까지 떨어져 큰 상금을 거의 정확히 상쇄해 버린다. 두 효과는 가운데 근처에서 가장 잘 균형을 이룬다. $x = 6$은 $x = 5$보다 상금이 크지만 이기는 방법이 네 가지가 아니라 세 가지뿐이어서 근소하게 뒤진다.

따라서 B에게 $\boxed{x = 5}$를 추측하라고 조언한다. 이때 기대 이득은 한 판에 437.5펜스, 즉 £4.375 (약 £4.38)이다.

검산

- 표의 확률을 모두 더하면 $\frac{16}{16} = 1$이다.
- 소문항 (i)의 결과가 정확히 25로 나오므로 표와 공식이 맞음을 확인할 수 있다.
- 5를 추측하는 게임을 400 000번 시뮬레이션한 결과 평균 이득은 약 437.2펜스로, 정확한 값 437.5와 비교된다.

흔한 실수

- 합 2부터 8까지가 모두 같은 확률이라고 생각하는 것: 같은 확률로 일어나는 결과는 16개의 **순서** 쌍이므로 그렇지 않다.
- B가 $50x$를 잃는 확률이 1이 아니라 $1 - p$라는 것을 잊는 것.
- 상금이 더 크다는 이유로 $x = 6$이나 $x = 7$에서 멈추는 것: 5와 6은 값이 가까우므로 모든 값을 계산해야 한다.

STEP 너머

이것은 기대 보수를 최대화하는 행동을 고르는 작은 의사결정 문제이다. 대학에서는 같은 아이디어가 결정 이론(decision theory)과 독립 확률변수(random variable)의 합에 대한 연구에서 나타난다. 합의 분포는 **합성곱**(convolution)으로 구하며(여기서는 표의 삼각형 모양이 그것이다), 주사위가 많아지면 중심극한정리(central limit theorem)에 의해 정규곡선(normal curve)에 가까워진다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 두 주제를 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.