풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 13

역학 • 원운동

> **STEP I 견본 문제지, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q13

핵심 아이디어

이 문제는 줄이 늘어날 수 있는 원뿔 진자(conical pendulum)이다. 훅의 법칙(Hooke's law)은 장력(tension)과 줄의 길이를 연결하고, 힘을 연직 방향과 수평 방향으로 분해(resolving forces)하면 장력이 g 및 ω와 연결된다. 줄이 연직선과 0이 아닌 각을 이루므로 장력은 mg보다 엄격하게 커야 하며, 바로 이 하나의 사실이 두 부등식을 모두 이끌어 낸다.

풀이

입자를 훅의 법칙을 따르는 가벼운 탄성 줄에 매달린 질점(point mass)으로 모형화하고, 공기 저항은 없다고 하자. λ를 탄성 계수(modulus of elasticity)라 하자.

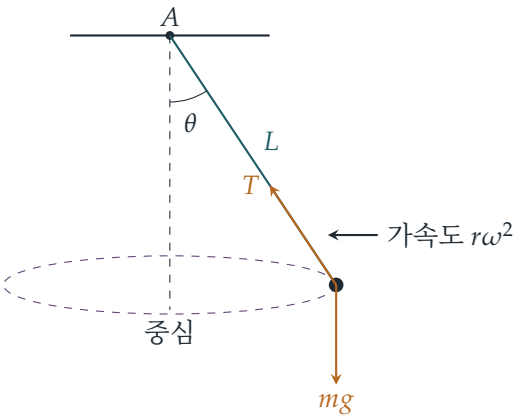
탄성 계수. 정지 상태로 매달려 있을 때 줄의 늘어난 길이(extension)는 $2a - a = a$이고 장력이 무게와 평형을 이룬다.

$$mg = \frac{\lambda a}{a} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = mg.$$

따라서 줄의 길이가 L일 때 장력은 다음과 같다.

$$T = \frac{mg(L-a)}{a}.$$

원운동. 입자가 A 아래에서 수평면 위의 원을 그리며 움직이고, 길이가 L인 줄이 아래쪽 연직선과 각 θ를 이룬다고 하자. 운동이 A의 높이보다 아래에서 일어나는 진짜 원운동이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고, 따라서 $\sin\theta > 0$이며 $0 < \cos\theta < 1$이다. 원의 중심은 A의 바로 아래에 있고, 반지름은 $r = L\sin\theta$이다.



A를 지나는 연직선에 대한 입자의 각속도(angular speed)는 ω이므로, 입자의 가속도는 $r\omega^2 = L\omega^2 \sin\theta$이고 수평 방향으로 중심을 향한다. 연직 방향의 가속도는 없다.

연직 방향으로 분해하면

$$T\cos\theta = mg. \tag{1}$$

수평 방향으로, 중심을 향하는 쪽으로 분해하면

$$T\sin\theta = mL\omega^2\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad T = mL\omega^2, \tag{2}$$

이다. 여기서 $\sin\theta \neq 0$이므로 $\sin\theta$로 나눌 수 있다.

> **생각해 보기** 원운동이 진짜라는 사실(입자가 그냥 가만히 매달려 있는 것이 아니라는 사실)은 어디에서 쓰이는가?

두 번 쓰인다. (2)에서 $\sin\theta$로 나눌 때, 그리고 아래에서 $\cos\theta < 1$이라고 말할 때이다. 만약 $\theta = 0$이면 입자는 그냥 축 위에 정지한 채 매달려 있을 뿐이고, (2)는 아무것도 말해 주지 않으며, 어떤 ω든 "성립"하게 된다.

줄의 길이는 $2a$보다 길다. (1)에서 $0 < \cos\theta < 1$이므로

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} > mg.$$

훅의 법칙을 쓰면 이는 다음을 뜻한다.

$$\frac{mg(L-a)}{a} > mg \quad\Longrightarrow\quad L - a > a \quad\Longrightarrow\quad L > 2a,$$

따라서 줄은 $2a$보다 긴 길이로 늘어난다.

ω의 범위. 훅의 법칙에서 얻은 T의 식과 (2)에서 얻은 식을 같다고 놓으면

$$mL\omega^2 = \frac{mg(L-a)}{a} \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{a}\left(1 - \frac{a}{L}\right).$$

$L > 2a$이므로 $0 < \frac{a}{L} < \frac{1}{2}$이고, 따라서 $\frac{1}{2} < 1 - \frac{a}{L} < 1$이다. 그러므로

$$\frac{g}{2a} < \omega^2 < \frac{g}{a},$$

이고, 이것이 보여야 할 것이었다.

역(converse) (요구되지는 않지만 안심이 된다). ω가 이 범위에 있으면 $L = \dfrac{a}{1 - a\omega^2/g}$로 놓자. 이 값은 양수이고 $L > 2a$를 만족하며, $\cos\theta = \dfrac{mg}{T} = \dfrac{a}{L-a}$를 주는데, 이는 0과 1 사이에 엄격하게 놓인다. 따라서 그러한 모든 ω에 대하여 원뿔 운동이 실제로 존재한다.

검산

- 극한(limits): $L \to 2a$일 때 장력은 mg로 다가가고, $\theta \to 0$이며 $\omega^2 \to g/(2a)$인데, 이는 길이가 $2a$인 단진자(simple pendulum)의 작은 진동의 진동수이다. $L \to \infty$일 때 $\omega^2 \to g/a$이다.
- 수치 계산: $\omega^2 = \frac{3}{4}\,g/a$로 두면 $L = 4a$, $T = 3mg$, $\cos\theta = \frac{1}{3}$을 얻는다. 이 초기 조건에서 출발하여 3차원 운동 방정식 전체를 두 바퀴 동안 단계적으로 수치 적분해 보면, 입자는 예측한 원에서 10^{-13} 단위 이내로 머물렀다.
- 단위: g/a의 단위는 s^{-2}으로, ω^2의 단위와 같아야 하는 대로 같다.

흔한 실수

- 원의 반지름을 $L\sin\theta$가 아니라 L로 잡는 것. 그러면 (2)에서 $\sin\theta$가 약분되지 않는다.
- $T > mg$이려면 $\cos\theta < 1$, 즉 $\theta \neq 0$이어야 한다는 것을 잊는 것. 엄격한 부등식은 이 사실에 달려 있다.
- 늘어난 길이 L 대신 자연 길이(natural length) a(또는 평형 길이 $2a$)를 반지름으로 쓰는 것.

STEP 너머

아래 한계 $\omega^2 = g/(2a)$는 연직선 주위의 작은 진동의 진동수이며, 이는 우연이 아니다. 축 근처의 정상 원뿔 운동은 서로 수직인 두 개의 작은 진동이 4분의 1 주기만큼 위상이 어

긋난 것에 지나지 않기 때문이다. 위쪽 한계는 줄이 아무리 많이 늘어나더라도 줄의 강성(stiffness)이 더 이상 구심력(centripetal force)을 공급할 수 없게 되는 지점이다. 정상 운동과 그 안정성(stability)을 연구하는 것, 예를 들어 입자를 원에서 살짝 밀어내면 어떻게 되는지 묻는 것은 대학 1학년 동역학(dynamics)의 표준 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 원뿔 진자와 회전하는 계에서의 운동 분석을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.