풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 12

역학 • 마찰이 있는 충돌

STEP I 견본 문제지, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s1-q12

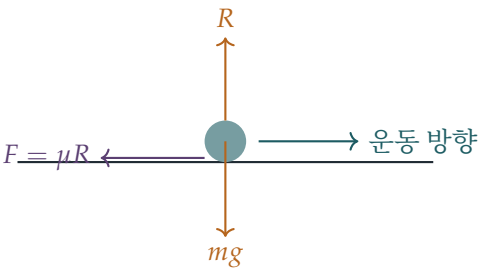
핵심 아이디어

이 문제에서는 마찰(friction)이 모든 일을 한다. 수평인 얼음 위를 미끄러지는 원판은 일정한 저항력을 받으므로 감속도(deceleration)가 일정하고, 사건과 사건 사이의 운동은 모양만 바뀐 "등가속도 운동(constant acceleration)"일 뿐이다. 끝에서부터 거꾸로 풀어 나간다. B의 정지 거리로부터 충돌 직후 B의 속력이 정해지고, 충돌 법칙을 쓰면 이것이 충돌 직전 A의 속력으로 바뀌며, 등가속도 단계를 한 번 더 거치면 출발점 O로 돌아간다.

풀이

모형

각 원판을 마찰 계수(coefficient of friction)가 μ인 수평의 거친 면 위에 놓인 질량 m의 질점으로 생각한다. 원판이 미끄러지는 동안 원판에 작용하는 힘은 아래 방향의 무게 mg, 위 방향의 수직 항력(normal reaction) R, 그리고 운동을 방해하는 최대 마찰력(limiting friction) F이다.



연직 방향으로 힘을 분해하면, 연직 방향의 가속도가 없으므로 $R = mg$이다. 원판이 미끄러

지고 있으므로 마찰력은 최대 마찰력이다: $F = \mu R = \mu mg$. 수평 방향으로 힘을 분해하면 $m\ddot{x} = -\mu mg$이므로, 미끄러지는 모든 원판은 질량에 관계없이 일정한 비율

$$a = \mu g,$$

로 감속한다. 또한 충돌(collision)은 순간적으로 일어난다고 가정하므로, 충돌하는 동안에는 마찰이 작용할 시간이 없다. 그때는 원판 사이의 충돌력만 중요하고, OC 방향의 운동량은 보존된다.

충돌 후 B의 속력

B는 O로부터 거리 d인 점에서 출발하여 O로부터 거리 $2d$인 C에서 멈추므로, 거리 d만큼 미끄러진다. 충돌 직후 B의 속력을 w라 하자. 나중 속력 0, 가속도 $-\mu g$, 변위 d를 $v^2 = u^2 + 2as$에 대입하면

$$0 = w^2 - 2\mu g d \quad \Longrightarrow \quad w = \sqrt{2\mu g d},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

충돌 직전 A의 속력

A가 속력 u로 B와 충돌하고, 충돌 직후 A의 속도를 v_A라 하자(둘 다 $O \to C$ 방향을 기준으로 잰다). 질량이 m으로 같으므로 운동량 보존(conservation of momentum)에 의해

$$mu = mv_A + mw \quad \Longrightarrow \quad u = v_A + w,$$

이고, 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)에 의해

$$w - v_A = eu.$$

이다. 두 식을 더하여 v_A를 소거하면 $2w = (1+e)u$이므로

$$u = \frac{2w}{1+e} = \frac{2\sqrt{2\mu g d}}{1+e}.$$

이다. (대신 두 식을 빼면 $v_A = \frac{1}{2}(1-e)u \geq 0$이므로, A는 더 느린 속력으로 같은 방향으로 계속 움직인다.)

생각해 보기 A가 다시 B를 따라잡아 계산을 망칠 수 있을까?

그렇지 않다. 충돌 후 두 원판은 같은 비율 μg로 감속하므로, 둘 다 움직이는 동안 속력의 차 $w - v_A = eu$는 일정하게 유지된다. B는 A보다 느려지는 일이 없으므로 계속 앞서 있고, 더 느린 속력으로 출발한 A가 먼저 멈춘다. 따라서 충돌은 정확히 한 번만 일어나고, d에서 $2d$까지 가는 B의 운동은 방해받지 않는다. ($e = 0$일 때는 두 원판이 멈출 때까지 함께 움직이며, 이 경우에도 더 이상의 충돌은 없다.)

처음 속력

A는 μg로 감속하면서 O에서 B까지 거리 d를 미끄러지므로, 다시 $v^2 = u^2 + 2as$에 의해

$$u^2 = U^2 - 2\mu g d \quad \Longrightarrow \quad U^2 = u^2 + 2\mu g d.$$

이다. u를 대입하면

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{4 \cdot 2\mu g d}{(1+e)^2} + 2\mu g d = \frac{2\mu g d}{(1+e)^2}(4 + (1+e)^2) \\ &= \frac{2\mu g d}{(1+e)^2}(5 + 2e + e^2). \end{aligned}$$

$U > 0$이고 $1 + e > 0$이므로 양의 제곱근을 택하면

$$U = \frac{\sqrt{2\mu g d}}{1+e}(5 + 2e + e^2)^{\frac{1}{2}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌, $e = 1$: 똑같은 두 원판은 속도를 맞바꾸므로, A는 그 자리에 멈추고 B는 A가 도착할 때의 속력 $u = w$로 떠난다. 공식에 따르면 $U = \sqrt{2}\sqrt{2\mu g d} = \sqrt{2\mu g (2d)}$이고, 이는 원판 하나가 C까지 $2d$ 전체를 미끄러지는 데 필요한 속력과 정확히 같다. 운동량이 그대로 전달되므로 이는 타당하다.
- 완전 비탄성(perfectly inelastic) 충돌, $e = 0$: 공식에 따르면 $U = \sqrt{5}\sqrt{2\mu g d}$이고, 이는 $e = 1$일 때보다 크다. 충돌에서 운동 에너지(kinetic energy)가 손실되므로 당연히 그래야 한다. 더 일반적으로 $(5 + 2e + e^2)/(1+e)^2 = 1 + 4/(1+e)^2$은 e가 커질수록 감소한다.
- 차원(dimensions): μ와 e는 단위가 없는 수이고 $\sqrt{gd}$는 속력이다.
- 수치로 확인하면, $\mu = 0.1$, $g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $d = 1\ \mathrm{m}$, $e = 0.5$일 때 공식은 $U = \frac{7}{3} \approx 2.33\ \mathrm{m\,s^{-1}}$을 준다. 이 U에서 출발하여 작은 시간 간격으로 운동을 단계별로 진행시키면(μ, d, e를 무작위로 여러 번 골라 보아도) B는 O로부터 $2d$의 0.001% 이내에서 정지한다.

흔한 실수

- 충돌 전후에 에너지 보존을 적용하는 것. $e = 1$이 아니면 충돌에서 운동 에너지가 손실된다. 충돌에서는 운동량과 반발 법칙(restitution law)을 쓰고, 일–에너지(work–energy) 단계(또는 $v^2 = u^2 + 2as$)는 사건과 사건 사이에서만 쓴다.

- A도 충돌 전에 거리 d만큼 미끄러진다는 사실을 잊고 $U = u$라고 쓰는 것.
- 반발 법칙을 거꾸로 쓰는 것. 멀어지는 속력 $w - v_A$가 가까워지는 속력 u의 e배와 같다.

STEP 너머

이 문제의 깔끔한 점은 마찰이 질량에 관계없이 모든 원판에 같은 감속도를 준다는 것이다. 그래서 μg로 감속하는 기준틀(frame)에서 보면, 두 원판이 미끄러지는 동안 얼음은 사실상 마찰이 없는 면이 되고, 충돌은 교과서에 나오는 충돌처럼 보인다. 편리한 기준틀을 고르는 것은 대학 역학의 핵심 기법이며, 마찰 법칙 $F = \mu R$ 자체는 경험적 모형이므로 그 한계를 알아 둘 가치가 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 마찰을 모두 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.