풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 11

역학 • 마찰과 구름 접촉

STEP I 견본 문제지, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s1-q11

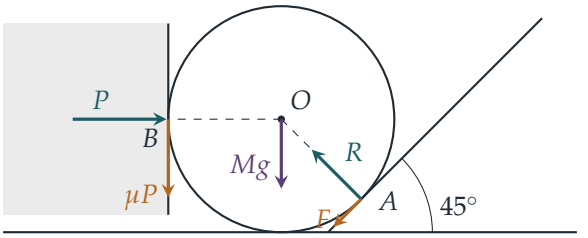
핵심 아이디어

원기둥이 막 움직이려는 순간에는 바닥이 더 이상 원기둥을 밀어 주지 않으므로, 중요한 것은 무게, 수직인 면, 경사면의 세 가지뿐이다. "구른다(roll)"는 것은 원기둥이 경사면 위에서 미끄러지지 않는다는 뜻이므로, 원기둥은 경사면과의 접점을 중심으로 회전하기 시작한다. 이때 수직인 면에 닿아 있는 점이 어떻게 움직이는지 계산해 보면, 원기둥이 그 면에 대해 미끄러질 수밖에 없음을 알 수 있다. 따라서 마찰(friction)이 한계에 이르는(limiting) 곳은 바로 그 면이다. 그러면 중심에 대한 모멘트(moment) 방정식에서 경사면의 마찰력이 별다른 수고 없이 바로 얻어진다.

풀이

모형. 원기둥은 반지름이 r인 균일한 강체(rigid body)이고, 문제를 그 중심 O를 지나는 수직 단면에서 다룬다. 장치의 면은 수직이고 수평으로 움직인다. 이 면과의 접점을 B라 하면 B는 O와 같은 높이에 있고, 경사면과의 접점을 A라 하자. 경사면의 기울기가 45°이므로 OA는 아래쪽 수직 방향과 45°를 이룬다. O를 원점으로 하여 x축은 오른쪽(경사면 쪽), y축은 위쪽으로 잡으면

$$B = (-r,\, 0), \qquad A = \tfrac{r}{\sqrt{2}}(1,\, -1).$$



어느 쪽 마찰이 한계에 이르는가

원기둥이 막 움직이려는 순간에는 바닥에서 막 떨어지려 하므로, 바닥의 수직항력(normal reaction)은 0이고 바닥의 마찰력도 함께 0이다. 경사면을 굴러 올라가려면 원기둥이 A에서 미끄러지지(slip) 않아야 하므로, 그 운동은 A를 중심으로 하는 회전으로 시작하고 중심은 경사면을 따라 $(1,1)$ 방향으로 올라간다. 이 회전은 시계 방향이다. 각속도(angular speed)를 ω라 하면, 원기둥 위의 점 X의 속도는 $X-A$를 시계 방향으로 90° 돌린 것에 ω를 곱한 것, 즉 $X-A=(x,y)$에 대하여 $\omega\,(y,-x)$이다. $X=B$일 때

$$B-A=r\left(-1-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{v}_B=\omega r\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\ 1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

면은 수평으로만 움직이는데 B는 위쪽 속도 성분을 가지므로, B는 면을 따라 미끄러져 올라간다. 원기둥이 두 면 위에서 동시에 구를 수는 없으므로 수직인 면에서는 반드시 미끄러지고, 따라서 **마찰이 한계에 이르는 곳은 수직인 면이다**. 마찰력은 미끄러짐을 방해하므로 원기둥에 **아래쪽으로** 크기 μP로 작용한다. 경사면에서는 미끄러짐이 없으므로 경사면의 마찰력 F는 평형(equilibrium)에 필요한 만큼의 값을 가지며, 조건은 $F\le \nu R$뿐이다. (경사면의 마찰 계수(coefficient of friction)를 ν로 쓴다. 문제에는 v로 인쇄되어 있다.)

> ? **생각해 보기** 왜 경사면 쪽 마찰이 한계에 이를 수는 없는가?

원기둥이 A에서 미끄러진다면 경사면을 구르는 것이 아니라 미끄러져 올라가는 것이다. 구른다는 것은 A에서 미끄러짐이 없다는 뜻이다. 위의 계산은 구름이 B에서의 미끄러짐을 강제한다는 것을 보여 주므로, 마찰력이 수직항력의 μ배에 이르는 접점은 B이다.

P 구하기

경사면의 수직항력을 R이라 하면 이는 AO 방향(방향 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$)으로 작용하고, 경사면의 마찰력을 F라 하되 경사면을 따라 **아래쪽**(방향 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$)을 양으로 잡는다.

O에 대한 모멘트. 무게, P, R은 모두 O를 지난다. B에서의 마찰력 μP는 거리 r에서 작용하며 원기둥을 시계 반대 방향으로 돌린다. A에서의 마찰력 F는 접선 방향이므로 역시 거리 r에서 작용하고, 경사면 아래쪽을 향할 때 원기둥을 시계 방향으로 돌린다. 따라서

$$\mu P\,r=Fr \quad\Longrightarrow\quad F=\mu P.$$

그러므로 경사면의 마찰력은 실제로 경사면 아래쪽으로 작용하며, 그 크기는 면에서의 마찰력과 같다.

수평 방향으로 분해하면:

$$P-\frac{R}{\sqrt{2}}-\frac{\mu P}{\sqrt{2}}=0 \quad\Longrightarrow\quad R=\sqrt{2}\,P-\mu P=P(\sqrt{2}-\mu). \tag{1}$$

수직 방향으로 분해하면:

$$\frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \mu P - Mg = 0. \tag{2}$$

(1)에서 얻은 $R/\sqrt{2} = P - \mu P/\sqrt{2}$를 (2)에 대입하면

$$\begin{aligned} P - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \mu P &= Mg \\ P(1 - \mu - \sqrt{2}\,\mu) &= Mg, \end{aligned}$$

이고, 여기서 $2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$를 이용했다. 따라서

$$P = \frac{Mg}{1 - \mu(1+\sqrt{2})},$$

이므로 요구하는 결과가 나온다.

μ와 ν에 대한 조건

μ에 대하여. P는 미는 힘의 크기이고 $Mg > 0$이므로 $1 - \mu(1+\sqrt{2}) > 0$이어야 한다. 즉

$$\mu < \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} - 1.$$

$\mu \geq \sqrt{2} - 1$이면 아무리 세게 밀어도 원기둥을 경사면 위로 굴려 올릴 수 없다. 면에서 아래쪽으로 작용하는 추가 마찰력이 들어 올리는 힘과 적어도 같은 빠르기로 P와 함께 커지므로, 원기둥이 꽉 끼어 버린다.

ν에 대하여. 원기둥은 경사면에서 미끄러지지 않으므로 $F \leq \nu R$이다. $F = \mu P$와 (1)을 이용하고, $\mu < \sqrt{2} - 1 < \sqrt{2}$이므로 $R > 0$임에 주의하면

$$\mu P \leq \nu P(\sqrt{2} - \mu) \quad \Longleftrightarrow \quad \nu \geq \frac{\mu}{\sqrt{2} - \mu},$$

이며, 여기서 $P(\sqrt{2} - \mu) > 0$으로 나누었다. 이로써 문제가 해결된다.

검산

- **매끄러운 면**, $\mu = 0$: 이때 $P = Mg$이고 경사면의 마찰은 필요 없다. 이는 수직인 벽과 45° 경사면 사이에 끼인 마찰 없는 원기둥과 일치한다. 경사면의 수직항력은 수평 성분과 수직 성분이 같으므로 P와 Mg를 똑같이 상쇄해야 한다.
- **수치**: $\mu = 0.2$이면 $P \approx 1.934\,Mg$이고 $\nu \geq 0.165$가 필요하다. 이 값들을 다시 대입하면 수평 방향 힘, 수직 방향 힘, O에 대한 모멘트가 모두 (반올림 오차 범위에서) 평형을 이루며, 임의의 M과 μ에 대해서도 마찬가지이다.
- $\mu \to \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$일 때 $P \to \infty$이며, 이는 위에서 설명한 끼임 현상과 일치한다.

흔한 실수

- 경사면에서 마찰이 한계에 이른다고 놓는 것. "구른다"는 조건이 그곳에서의 미끄러짐을 배제한다.
- 바닥의 수직항력을 남겨 두는 것. 굴러 올라가기 시작하는 순간 원기둥은 바닥에서 막 떨어지려 하므로 바닥의 수직항력은 0이다.
- 면에서의 마찰력 방향을 잘못 잡는 것. B는 면에 대해 **위로** 움직이므로 원기둥에 작용하는 마찰력은 **아래로** 향한다. 이 때문에 P가 Mg보다 크다.

STEP 너머

순간 회전 중심(instantaneous centre of rotation)을 살펴서 어느 접점이 미끄러지는지 판단하는 핵심 단계는 강체 운동학(rigid-body kinematics)의 출발점이다. 대학 1학년 과정에서는 이것이 일반적인 규칙 $\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (X - O)$와, 여러 거친 접점이 서로 경쟁하는 문제로 이어진다. $\mu \geq \sqrt{2} - 1$에서 일어나는 "끼임", 즉 더 세게 밀어도 전혀 도움이 되지 않는 현상은 자기 잠금(self-locking) 효과로, 공학자들이 쐐기와 클램프에서 일부러 활용한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 운동과 마찰을 바로 이런 세심함으로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.