풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 10

역학 • 일률과 저항

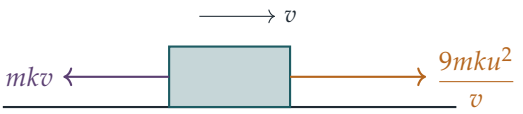
> **STEP I 견본 문제지, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q10

핵심 아이디어

일률(power)은 힘과 속력의 곱이므로, 일정한 일률 P로 작동하는 기관차는 P/v의 구동력(driving force)으로 끈다. 그러면 뉴턴(Newton)의 제2법칙(second law)에서 v에 대한 변수분리형(separable) 1계 미분방정식(first-order differential equation)을 얻는다. 핵심은 가속도(acceleration)를 알맞은 꼴로 고르는 것이다. 문제가 시간을 물으면 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$를, 거리를 물으면 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$를 쓴다.

풀이

기관차를 수평 선로 위의 질량 m인 입자로 모형화한다. 그러면 무게와 수직항력(normal reaction)이 상쇄되므로 수평 방향의 힘만 생각하면 된다. 운동 방향을 양의 방향으로 잡는다.



최대 속력

속력이 v일 때 구동력은 $9mku^2/v$이므로, 뉴턴의 제2법칙에서

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{9mku^2}{v} - mkv \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{k\,(9u^2 - v^2)}{v}.$$

$v < 3u$인 동안에는 우변이 양수이므로 기관차는 빨라진다. 가속이 멈추는 것은 구동력과 저항(resistance)이 균형을 이루는 곳, 즉 $9u^2 = v^2$일 때뿐이다. 따라서 가능한 최대 속력은

$$v_{\max} = 3u.$$

? **생각해 보기** $v < 3u$인 동안 기관차는 항상 가속하는데, 왜 $3u$에 도달하지 못할까?

$v \to 3u$일 때 가속도는 0으로 줄어든다. 변수를 분리하면, 속력 v_1에서 속력 v_2까지 가는 데 걸리는 시간은

$$t = \frac{1}{k}\int_{v_1}^{v_2} \frac{v}{9u^2 - v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{9u^2 - v_1^2}{9u^2 - v_2^2}\right),$$

이고, 이 값은 $v_2 \to 3u$일 때 무한대로 발산한다. 따라서 $3u$는 종단 속력(terminal speed)이다. 기관차는 이 속력에 원하는 만큼 가까워질 수 있지만, 유한한 시간 안에 실제로 도달하지는 못한다. (같은 말이지만, $v = 3u$는 이 미분방정식의 평형해(equilibrium)이고, 해의 유일성(uniqueness of solutions)에 의해 그보다 아래에서 출발한 해는 그 값에 도달할 수 없다.)

u에서 $2u$까지

위 식에 $v_1 = u$, $v_2 = 2u$를 대입하면

$$t = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{9u^2 - u^2}{9u^2 - 4u^2}\right) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8u^2}{5u^2}\right) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8}{5}\right),$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

동력 차단

이제 작용하는 힘은 두 저항 mkv와 mkB뿐이며, 둘 다 운동을 방해한다. 구하려는 것이 거리이므로 가속도를 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$로 쓴다.

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -mk(v + B) \quad\Longrightarrow\quad \frac{v}{v + B}\,\mathrm{d}v = -k\,\mathrm{d}x.$$

$\dfrac{v}{v+B} = 1 - \dfrac{B}{v+B}$로 쓰고, x가 0에서 D까지 증가하는 동안 v가 $2u$에서 0으로 줄어드는 구간에서 적분하면

$$\begin{aligned} kD &= \int_0^{2u}\left(1 - \frac{B}{v+B}\right)\mathrm{d}v \\ &= \Big[v - B\ln(v+B)\Big]_0^{2u} \\ &= 2u - B\ln\left(\frac{2u+B}{B}\right). \end{aligned}$$

따라서 동력이 차단된 뒤 이동한 거리는

$$D = \frac{1}{k}\left[2u - B\ln\left(1 + \frac{2u}{B}\right)\right].$$

이번에는 기관차가 유한한 시간 안에 실제로 멈춘다. $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -k(v+B) \le -kB < 0$이므로 감속도(deceleration)가 결코 kB 아래로 떨어지지 않기 때문이다. 바로 이 때문에 추가적인 상수 저항이 필요한 것이다.

검산

- $B \to 0$이면 $B\ln(1+2u/B) \to 0$이므로 $D \to 2u/k$이다. 이는 저항 mkv만 있는 경우와 일치한다. 이때 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = -kv$이므로 v는 거리에 대해 비율 k로 일차적으로 감소한다.
- $y > 0$일 때 $\ln(1+y) < y$이므로 $B\ln(1+2u/B) < 2u$이고, 따라서 $D > 0$이다. 또한 B가 커질수록 D는 감소하는데, 당연히 그래야 한다.
- 수치적으로, $k = u = B = 1$로 놓고 운동 방정식을 단계별로 계산하면 정지 거리가 0.90139로 나와 $2 - \ln 3 \approx 0.90139$와 일치한다. 동력이 작용하는 구간을 $v = 1$에서 시작해 시간 $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} \approx 0.2350$ 동안 단계별로 계산하면 $v = 2.0000$에서 끝난다.

흔한 실수

- 구동력을 상수로 취급하는 것. 일률이 일정하면 힘은 P/v이고, 기관차가 빨라질수록 줄어든다.
- 마지막 소문항에서 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$를 쓰는 것. 그러면 거리가 아니라 정지 시간이 나온다.
- 기관차가 "결국에는" $3u$에 도달한다고 주장하는 것. 시간 적분이 발산하므로 결코 도달하지 못한다.

STEP 너머

속력 $3u$는 자율 미분방정식(autonomous equation) $\dot{v} = f(v)$의 안정 평형점(stable equilibrium)이다. 해는 지수적으로 이 값에 다가가지만 결코 만나지 않는데, 잘 정의된 미분방정식의 해들은 서로 교차하거나 합쳐질 수 없기 때문이다. 이것은 미분방정식 첫 강좌에서 배우는 유일성 정리(uniqueness theorem)와 위상선 분석(phase-line analysis)을 처음 맛보는 것이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 두 가지를 모두 다룬다. 일률과 저항력에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.