풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 1

순수수학 • 판별식과 부분분수

> **STEP I 견본 문제지, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q1

핵심 아이디어

소문항 (i)에서 방정식은 각각의 고정된 x에 대하여 y에 관한 이차방정식(quadratic)이고, 실수 y는 판별식(discriminant)이 음이 아닐 때에만 존재한다. 이 조건이 바로 x에 대한 제한이 된다. 역할을 바꾸어 보면 방정식은 x에 관한 이차방정식이기도 하며, 이로부터 y에 대한 제한을 얻는다. 소문항 (ii)는 전형적인 부분분수(partial fractions) 문제이다. 분수를 이항전개(binomial expansion)를 알고 있는 조각들로 나눈 다음, x^n의 계수를 더하면 된다.

풀이

소문항 (i)

방정식을 계수가 x에 의존하는 y에 관한 이차방정식으로 보자.

$$y^2 + 16x\,y + (4x^2 + 24x) = 0.$$

주어진 실수 x에 대하여 이 식을 만족하는 실수 y가 존재할 필요충분조건은 판별식이 음이 아닌 것이다.

$$\begin{aligned}(16x)^2 - 4(4x^2 + 24x) &= 256x^2 - 16x^2 - 96x \\ &= 240x^2 - 96x = 48x(5x - 2) \geq 0.\end{aligned}$$

곱 $x(5x-2)$가 음이 아닌 것은 두 인수의 부호가 같을 때(또는 한 인수가 0일 때), 즉 $x \leq 0$ 또는 $x \geq \frac{2}{5}$일 때이고 그때뿐이다. 따라서 모든 실수해는

$$x \leq 0 \quad \text{또는} \quad x \geq \tfrac{2}{5},$$

을 만족하며, 이것이 증명하려던 것이다.

이제 방정식을 x에 관한 이차방정식으로 다루자.

$$4x^2 + (16y + 24)x + y^2 = 0.$$

실수 x가 존재할 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(16y+24)^2 - 16y^2 &= 256y^2 + 768y + 576 - 16y^2 \\ &= 240y^2 + 768y + 576 \\ &= 48(5y^2 + 16y + 12) = 48(5y+6)(y+2) \geq 0.\end{aligned}$$

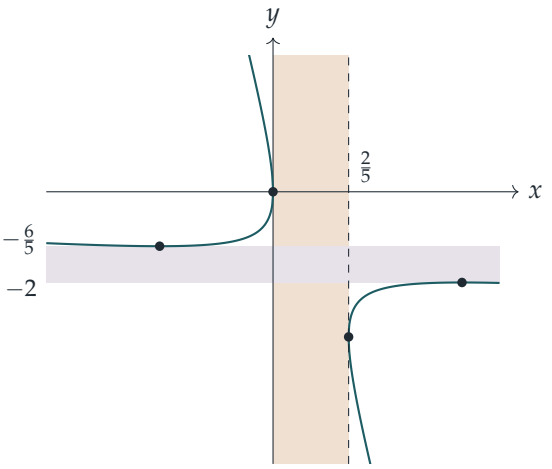
$(5y+6)(y+2)$의 근은 $y = -2$와 $y = -\frac{6}{5}$이고, 이 이차식은 두 근 사이에서만 음이다. 따라서

$$y \leq -2 \quad \text{또는} \quad y \geq -\tfrac{6}{5}.$$

생각해 보기 이 제한들이 가장 좋은 것일까, 아니면 실제 범위는 더 좁을 수 있을까?

이 제한들은 정확하다. 판별식을 이용한 논증은 "필요충분조건"이다. 즉 $x \leq 0$ 또는 $x \geq \frac{2}{5}$인 모든 x는 적어도 하나의 실수 y를 주며, y에 대해서도 마찬가지이다. 경곗값 역시 중근(double root)에 의해 실제로 얻어진다. x의 경계에 대해서는 $(x,y) = (0,0)$과 $(\frac{2}{5}, -\frac{16}{5})$, y의 경계에 대해서는 $(1,-2)$와 $(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5})$이다. 각 점이 원래 방정식을 만족하는지 확인해 볼 수 있다.

기하학적으로 이 곡선은 쌍곡선(hyperbola)이고($16^2 > 4 \cdot 4 \cdot 1$이므로), 제외된 두 띠는 쌍곡선의 두 가지 사이의 틈이다.



소문항 (ii)

다음과 같이 쓰자.

$$\frac{9}{(2-x)^2(1+x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{2-x} + \frac{C}{(2-x)^2},$$

그러면 $9 = A(2-x)^2 + B(2-x)(1+x) + C(1+x)$이다. $x=-1$을 대입하면 $9=9A$이므로 $A=1$이고, $x=2$를 대입하면 $9=3C$이므로 $C=3$이며, $x=0$을 대입하면 $9=4A+2B+C=7+2B$이므로 $B=1$이다. 따라서

$$\frac{9}{(2-x)^2(1+x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} + \frac{3}{(2-x)^2}.$$

이제 각 조각을 전개한다. 이항급수(binomial series)가 $\frac{x}{2}$의 거듭제곱으로 나타나도록 인수 2를 밖으로 빼낸다.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n, && |x|<1,\\
\frac{1}{2-x} &= \frac{1}{2}\Big(1-\frac{x}{2}\Big)^{-1} = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{2^{n+1}}, && |x|<2,\\
\frac{3}{(2-x)^2} &= \frac{3}{4}\Big(1-\frac{x}{2}\Big)^{-2} = \frac{3}{4}\sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{x^n}{2^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{3(n+1)}{2^{n+2}}x^n, && |x|<2,
\end{aligned}$$

여기서 $|u|<1$일 때 $(1-u)^{-2}=\sum_{n\geq 0}(n+1)u^n$임을 이용하였다. 이들을 더하면 x^n의 계수(coefficient)는

$$(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{3(n+1)}{2^{n+2}} = (-1)^n + \frac{2+3n+3}{2^{n+2}} = (-1)^n + \frac{3n+5}{2^{n+2}}.$$

세 급수가 모두 수렴(converge)하는 것은 정확히 $|x|<1$일 때이다(첫 번째 급수는 $|x|<1$이 필요하고, 나머지는 $|x|<2$이면 충분하다). $1\leq|x|<2$이면 뒤의 두 급수는 여전히 수렴하지만 첫 번째 급수는 수렴하지 않으므로, 그 합도 수렴할 수 없다. 따라서 이 전개가 성립하는 범위는

$$-1<x<1.$$

검산

소문항 (i)에서 점 $(1,-2)$를 대입하면 $4-32+4+24=0$이고, $(-\frac{3}{5},-\frac{6}{5})$를 대입하면 $\frac{36}{25}+\frac{288}{25}+\frac{36}{25}-\frac{360}{25}=0$이므로, y의 두 경계가 모두 실제로 얻어짐을 확인할 수 있다. 소문항 (ii)에서 $n=0$이면 $1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$이고, 이는 $x=0$에서의 값 $\frac{9}{4\cdot 1}$과 일치한다. 또 $n=1$이면 $-1+\frac{8}{8}=0$인데, 분모 $(2-x)^2(1+x)=4-3x^2+x^3$에 x항이 없으므로 이것이 옳다. 수치적으로도 $x=0.9$에서 급수를 더하면 $3.914745\ldots$가 되어 $9/(1.1^2\times 1.9)$와 일치한다.

흔한 실수

- 부등식의 방향을 거꾸로 하여 $-2 \leq y \leq -\frac{6}{5}$라고 답하는 것. 판별식은 두 근 사이에서 음이므로, 이 구간은 제외되는 구간이다(또한 $(0,0)$은 곡선 위의 점인데, $y = 0$은 이 구간 밖에 있다).
- $(2-x)^{-1}$을 마치 $(1-x)^{-1}$인 것처럼 전개하여, 인수 $\frac{1}{2}$(제곱된 항에서는 $\frac{1}{4}$)를 빼내는 것을 잊는 것.
- 성립 범위를 $|x| < 2$라고 답하는 것. 전개는 모든 조각이 수렴하는 곳에서만 성립하므로 $|x| < 1$이다.

STEP 너머

소문항 (i)의 곡선은 원뿔곡선(conic)이며, 이것이 타원(ellipse), 포물선(parabola), 쌍곡선 중 무엇인지는 이차항 $ax^2 + bxy + cy^2$에 대한 $b^2 - 4ac$의 부호에 따라 결정된다. 대학에서는 이를 이차형식(quadratic form)의 대칭행렬(symmetric matrix)과 그 고윳값(eigenvalue)을 통해 이해한다. 소문항 (ii)는 수렴반지름(radius of convergence)의 개념과 맞닿아 있다. 전개는 함수가 발산하는 가장 가까운 점, 여기서는 $x = -1$까지 성립한다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이차형식을 다루고, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 멱급수(power series)와 그 수렴을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.