풀이

STEP III 1999, 문제 9

역학 • 뉴턴의 껍질 정리

> **STEP III 1999, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q9

이 문제는 *Beyond STEP*의 10.7 절 **구 껍질 안의 중력**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/shell-theorem.html

핵심 아이디어

크기가 있는 물체(extended body)가 만드는 중력은 그 물체를 이루는 작은 조각들이 끌어당기는 힘의 벡터 합(vector sum)이다. 고리의 경우에는 대칭성(symmetry)이 대부분의 일을 해 준다. 고리의 맞은편에 있는 조각들은 서로의 옆 방향 힘을 상쇄하고, 모든 조각이 입자로부터 같은 거리에 있으므로 단순한 성분 하나만 남는다. 구껍질(shell)의 경우에는 축이 입자를 지나는 고리들로 구껍질을 자르고, 각 조각에 고리의 결과를 적용한 다음, 적분으로 그 조각들을 모두 더한다. 치환(substitution)을 잘 고르면 그 적분이 0으로 깔끔하게 정리된다.

풀이

고리

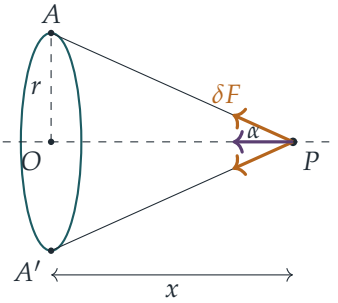
고리를 질량 m인 가늘고 균일한 원으로, 입자를 축 위에서 중심 O로부터 거리 x만큼 떨어진 점 P에 있는 단위 질량의 점으로 모형화한다. P, O와 고리 위의 한 점이 이루는 직각삼각형에서 피타고라스(Pythagoras)의 정리에 의해, 고리 위의 모든 점은 P로부터 같은 거리

$$d = \sqrt{x^2 + r^2}$$

에 있다.

방향. 고리의 A에 있는 작은 요소 하나를 지름의 반대쪽 점 A'에 있는 같은 크기의 요소와

짝짓는다. 두 요소는 P로부터 같은 거리 d에 있으므로, PA와 PA' 방향으로 같은 크기의 힘으로 끌어당긴다. 이 두 직선은 축에 대하여 서로 대칭이므로, 축에 수직인 성분은 상쇄되고 축 방향 성분은 더해지며, 둘 다 P에서 O를 향한다. 고리 전체가 이러한 짝들로 이루어져 있으므로, 입자에 작용하는 알짜힘은 축 방향이고 고리의 중심을 향한다.



크기. 질량 δm인 요소는 PA 방향으로 크기 $G\,\delta m/d^2$인 힘으로 끌어당긴다. α를 PA와 축 PO 사이의 각이라 하면 $\cos\alpha = x/d$이므로, 이 힘의 O를 향하는 성분은

$$\frac{G\,\delta m}{d^2}\cdot\frac{x}{d} = \frac{Gx\,\delta m}{(x^2+r^2)^{3/2}}.$$

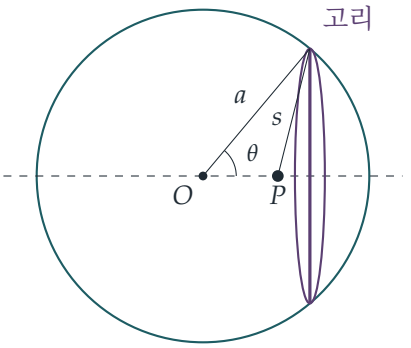
이다. δm에 곱해지는 인수는 모든 요소에 대하여 같으므로, 고리 전체에 대하여 더하면 δm이 m으로 바뀔 뿐이다.

$$F = \frac{Gmx}{(x^2+r^2)^{3/2}},$$

그리고 힘은 중심을 향하므로, 요구한 결과를 얻는다. P가 고리의 반대편에 있으면 x를 $|x|$로 바꾸어 이 식이 성립한다. 다음 부분에서는 x를 부호 있는 거리로 사용하는데, 그러면 부호 있는 x로 쓴 식이 힘의 부호 있는 성분을 올바르게 준다.

구껍질

구껍질의 중심을 O, 반지름을 a, 질량을 M이라 하면, 면밀도(surface density)는 $M/(4\pi a^2)$이다. 입자를 $OP = b < a$인 점 P에 둔다. $b = 0$이면 O에서 보는 모든 방향이 같고 구껍질의 서로 반대쪽 점들이 끌어당기는 힘이 상쇄되므로, 힘은 0이다. 이제부터는 $0 < b < a$로 두고 직선 OP를 축으로 삼아, 그 위의 거리를 O에서 P 쪽 방향으로 잰다.



OP에 수직인 평면들로 구껍질을 얇은 고리들로 자른다. (O에서 OP 방향을 기준으로 잰) 극각 θ와 $\theta + \delta\theta$ 사이의 고리는 반지름이 $a\sin\theta$이고, 중심이 축 위의 위치 $a\cos\theta$에 있으며, 폭이 $a\,\delta\theta$이다. 이 고리의 질량은

$$\delta M = \frac{M}{4\pi a^2} \cdot 2\pi a \sin\theta \cdot a\,\delta\theta = \tfrac{1}{2} M \sin\theta\,\delta\theta.$$

이다. 이 고리의 중심은 P로부터 부호 있는 거리 $a\cos\theta - b$에 있다. 고리의 결과에 의해 이 고리가 P를 끌어당기는 힘은 축 방향이고, 양의 방향(O에서 멀어지며 P를 지나는 방향) 성분은

$$\frac{G\,\delta M\,(a\cos\theta - b)}{\left((a\cos\theta - b)^2 + a^2\sin^2\theta\right)^{3/2}} = \frac{G\,\delta M\,(a\cos\theta - b)}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{3/2}}.$$

이다. 이 부호 규약은 두 경우 모두 옳다. $a\cos\theta > b$이면 고리가 P 너머에 있어 양의 방향으로 끌어당기고, $a\cos\theta < b$이면 반대 방향으로 끌어당긴다. 모든 고리가 같은 축 방향으로 끌어당기므로 전체 힘은 OP 방향이고, 그 성분은

$$F = \frac{GM}{2} \int_0^{\pi} \frac{(a\cos\theta - b)\sin\theta}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta.$$

이다.

? 생각해 보기 어떤 치환이 분모를 다루기 쉽게 만들어 줄까?

코사인 법칙(cosine rule)에 의해 $a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$는 P에서 고리까지의 거리 s(그림에서 s로 표시한 선분)의 제곱이다. 따라서

$$s^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta, \qquad 2s\,\mathrm{d}s = 2ab\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

로 치환한다. θ가 0에서 π까지 변할 때 s는 $a - b$에서 $a + b$까지 증가한다($b < a$이므로 양수이다). 또한

$$a\cos\theta - b = \frac{a^2 + b^2 - s^2}{2b} - b = \frac{a^2 - b^2 - s^2}{2b}.$$

이다. $\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{s\,\mathrm{d}s}{ab}$를 이용하면

$$F = \frac{GM}{2}\int_{a-b}^{a+b}\frac{a^2-b^2-s^2}{2b}\cdot\frac{1}{s^3}\cdot\frac{s}{ab}\,\mathrm{d}s = \frac{GM}{4ab^2}\int_{a-b}^{a+b}\left(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\right)\mathrm{d}s$$
$$= \frac{GM}{4ab^2}\left[-\frac{a^2-b^2}{s}-s\right]_{a-b}^{a+b}.$$

이다. $s = a+b$에서 괄호 안의 값은 $-(a-b)-(a+b) = -2a$이고, $s = a-b$에서는 $-(a+b)-(a-b) = -2a$이다. 두 값이 같으므로

$$F = \frac{GM}{4ab^2}\big(-2a-(-2a)\big) = 0.$$

이다. 힘은 OP 방향이고 그 OP 방향 성분이 0이므로, 입자는 구껍질에 의한 중력을 전혀 받지 않는다. 이로써 요구한 결과를 얻는다.

검산

- 고리: $x = 0$에서 힘은 0이고(입자가 중심에 있어 힘들이 균형을 이룬다), $x \gg r$이면 모든 질량이 O에 있는 것처럼 Gm/x^2에 가까워진다.
- 구껍질의 바깥: 만약 $b > a$이면 아래끝이 $s = b-a$가 되고, 여기서 괄호 안의 값은 $(a+b)-(b-a) = 2a$이다. 그러면 $F = \frac{GM}{4ab^2}(-4a) = -GM/b^2$로, 전체 질량이 중심에 있는 것처럼 O를 향하는 인력이다. 이것은 뉴턴(Newton)의 또 다른 구껍질 정리로, 적분이 옳다는 좋은 신호이다.
- 수치적으로, 고리 둘레의 점질량 2000개를 더하면 소수점 아래 열째 자리까지 공식과 일치했다. θ에 대한 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 무작위로 고른 여러 $b < a$에 대하여 약 10^{-15}가 나왔고, $a = 2$, $b = 1.3$, $GM = 1$로 무작위 점 2×10^5개를 사용한 몬테카를로(Monte Carlo) 구껍질은 전형적인 크기 $GM/a^2 = 0.25$에 비해 10^{-3}보다 작은 힘을 주었다.

흔한 실수

- 고리의 질량 요소를 $M\,\delta\theta/\pi$로 잡는 것. $\theta = \pi/2$ 근처의 고리들이 더 크므로, 질량은 $\delta\theta$가 아니라 $\sin\theta\,\delta\theta$에 비례한다.
- 고리 공식에서 $|a\cos\theta - b|$를 사용하는 것. P의 양쪽에 있는 고리들은 반대 방향으로 끌어당기며, 바로 그 상쇄가 핵심이다.
- s의 적분 범위를 잘못 잡는 것. P가 안쪽에 있으므로 $\theta = 0$에서 거리는 $b-a$가 아니라 $a-b$이다.

STEP 너머

이것은 뉴턴의 구껍질 정리(shell theorem)이며, 중력에 대한 가우스(Gauss) 법칙을 이용한 더 매끄러운 증명이 있다. 임의의 닫힌 곡면을 지나는 중력장의 선속(flux)은 그 안의 질량에 비례하므로, 대칭성에 의해 속이 빈 구껍질 내부의 장은 0이어야 한다. 같은 수학으로 퍼텐셜(potential)도 구할 수 있는데, 구껍질 내부에서 퍼텐셜이 상수라는 사실은 대학 1학년 벡터 해석(vector calculus)에서 배우는 조화 함수(harmonic function)의 초기 예이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 구껍질 정리와 중력 퍼텐셜을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.