풀이

STEP III 1999, 문제 8

순수수학 • 구간별로 정의된 미분방정식

> **STEP III 1999, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q8

핵심 아이디어

각 구간에서 이 방정식은 진동수가 일정한 단순 조화 운동(simple harmonic motion)이므로, 그 구간에서의 일반해(general solution)는 $\cos nx$와 $\sin nx$의 일차결합이다. 해야 할 일은 이어 붙이는 것뿐이다. 연속성 조건(continuity conditions)이 앞 구간의 끝에서의 y와 y'의 값을 다음 구간의 시작값으로 넘겨준다. 모든 구간의 길이가 2π이므로 시작값이 매번 똑같다는 것이 밝혀지고, 수학적 귀납법(induction)으로 증명할 수 있는 규칙이 드러난다.

풀이

소문항 (i)

$0 < x < 2\pi$에서는 $n = 1$이므로 $y'' + y = 0$이고, 일반해는

$$y = A\cos x + B\sin x.$$

이다. y와 y'이 $x = 0$에서 연속이므로 조건 $y(0) = 0$과 $y'(0) = 1$이 이 해에 적용된다. 즉 $y(0) = A = 0$이고 $y'(0) = B = 1$이다. 따라서

$$y = \sin x \qquad (0 \le x \le 2\pi).$$

이다. 오른쪽 끝에서는 $y(2\pi) = \sin 2\pi = 0$이고 $y'(2\pi) = \cos 2\pi = 1$이다.

소문항 (ii)

$2\pi < x < 4\pi$에서는 $n = 2$이므로 $y'' + 4y = 0$이고

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

이다. $x = 2\pi$에서 y와 y'이 연속이므로, 이 해는 그 점에서 소문항 (i)의 끝에서 구한 값인 $y = 0$과 $y' = 1$을 가져야 한다. $\cos 4\pi = 1$이고 $\sin 4\pi = 0$이므로

$$y(2\pi) = A = 0, \qquad y'(2\pi) = 2B\cos 4\pi = 2B = 1,$$

이다. 따라서 $B = \frac{1}{2}$이고, $2\pi \le x \le 4\pi$에서 $y = \frac{1}{2}\sin 2x$이다. 이로써 요구된 결과가 증명된다.

여기서도 $y(4\pi) = \frac{1}{2}\sin 8\pi = 0$이고 $y'(4\pi) = \cos 8\pi = 1$임에 주목하자. 다음 구간은 정확히 같은 값에서 시작한다. 이로부터 다음 주장을 추측할 수 있다.

주장. 모든 양의 정수 n에 대하여

$$y = \frac{1}{n}\sin nx \qquad \text{단, } 2(n-1)\pi \le x \le 2n\pi.$$

수학적 귀납법에 의한 증명. $n = 1$인 경우는 소문항 (i)이다. $n = k$일 때 주장이 성립한다고 가정하자. $x = 2k\pi$에서 앞 조각은

$$y = \frac{1}{k}\sin(2k^2\pi) = 0, \qquad y' = \cos(2k^2\pi) = 1,$$

을 준다. $2k^2\pi$는 2π의 정수배이기 때문이다. $2k\pi < x < 2(k+1)\pi$에서 방정식은 $y'' + (k+1)^2 y = 0$이므로

$$y = A\cos(k+1)x + B\sin(k+1)x.$$

이다.

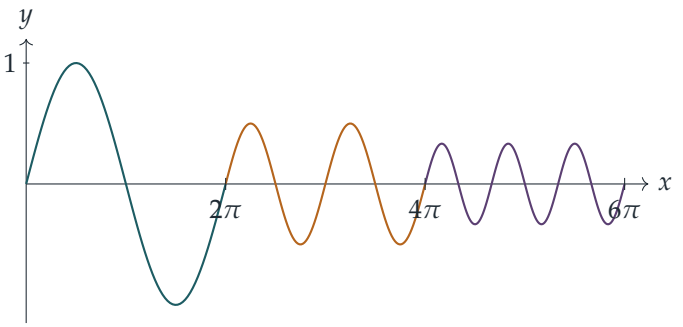
생각해 보기 왼쪽 끝 $x = 2k\pi$에서 $\cos(k+1)x$와 $\sin(k+1)x$의 값은 무엇인가?

그 점에서 $(k+1)x = 2k(k+1)\pi$이고, 이 역시 2π의 정수배이므로 코사인 값은 1, 사인 값은 0이다. 따라서 $x = 2k\pi$에서 y와 y'의 연속성으로부터

$$A = 0, \qquad (k+1)B = 1,$$

을 얻는다. 그러므로 $2k\pi \le x \le 2(k+1)\pi$에서 $y = \dfrac{1}{k+1}\sin(k+1)x$이다. 이것은 $n = k+1$일 때의 주장이며, 수학적 귀납법에 의해 주장은 모든 $n \ge 1$에 대하여 성립한다. □

따라서 $2(n-1)\pi \le x \le 2n\pi$일 때마다 $y(x) = \dfrac{1}{n}\sin nx$이다. (각 이음점 $x = 2n\pi$에서 이웃한 두 식이 모두 $y = 0$을 주므로 모호함은 없다.)



소문항 (iii)

소문항 (ii)를 이용하면, n번째 구간에서

$$\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} (1-\cos 2nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{n^2},$$

이다. 각 적분 한계가 π의 배수이고 $2n$이 정수이므로 $\sin 2nx$는 두 한계에서 모두 0이 되어, 코사인 항의 적분은 0이기 때문이다.

처음 N개의 구간을 더하면

$$\int_0^{2N\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}.$$

이다. 이상적분(improper integral)은 $X\to\infty$일 때 $\int_0^X y^2\,\mathrm{d}x$의 극한이다. $y^2\geq 0$이므로 이것은 X에 대한 증가함수이고, $2(N-1)\pi \leq X \leq 2N\pi$일 때 그 값은 $2(N-1)\pi$와 $2N\pi$에서의 값 사이에 있다. 급수가 수렴(converge)하므로, $N\to\infty$일 때 이 두 값은 모두 $\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$로 수렴한다. 따라서

$$\int_0^{\infty} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

이고, 이로써 요구된 결과가 증명된다.

검산

- 각 조각 $\frac{1}{n}\sin nx$는 $y''=-n^2y$를 만족하고, $y=0, y'=1$에서 시작하여 $y=0, y'=1$에서 끝나므로, 조각들은 함숫값과 기울기 모두에서 매끄럽게 이어진다.
- 미분방정식(differential equation)을 수치적으로(4차 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법으로) 처음 여섯 구간에 걸쳐 풀면 $\frac{1}{n}\sin nx$가 10^{-10} 이내의 오차로 재현되고, 12π까지의 y^2의 적분은 4.685336으로 나와 $\pi(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{36})$과 일치한다.
- 오일러(Euler)의 결과 $\sum 1/n^2=\pi^2/6$을 이용하면 이 적분은 $\pi^3/6\approx 5.168$이다.

흔한 실수

- 초기 조건을 각 구간의 왼쪽 끝 $x = 2(n-1)\pi$가 아니라 모든 구간에서 $x = 0$에 적용하는 것. 여기서 이렇게 해도 우연히 올바른 답이 나오는 것은 시작점이 2π의 배수이기 때문일 뿐이며, 이 사실을 반드시 밝혀야 한다.
- $y' = nB\cos nx$임을 잊는 것. 바로 이 인수 n이 진폭(amplitude) $\frac{1}{n}$을 만들어 낸다.
- 극한이 존재하는 이유를 말하지 않고 적분을 무한급수로 쓰는 것. y^2이 음이 아니라는 사실을 이용하면 이 부분은 쉽게 해결된다.

STEP 너머

이것은 구간별 상수 계수(piecewise-constant coefficients)를 갖는 미분방정식의 간단한 예이다. 이런 방정식은 정해진 시각마다 강성이 바뀌는 용수철을 모형화한다. 각 전환 시점에서 y''은 불연속적으로 뛰지만 해는 여전히 연속이고 미분가능하다. 최종 답 $\pi^3/6$은 미분방정식을 바젤 문제(Basel problem)의 합 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$과 연결해 주는데, 이 합은 대학 학부의 푸리에 급수(Fourier series) 강의에서 파스발 정리(Parseval's theorem)를 이용해 처음 증명하는 경우가 많다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 2계 선형 방정식과 푸리에 급수를 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.