풀이

STEP III 1999, 문제 7

순수수학 • 군과 동형사상

> **STEP III 1999, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q7

핵심 아이디어

식 $x+y+axy$는 거의 곱에 가깝다. a를 곱하고 1을 더하면

$$1+a(x*y) = 1+ax+ay+a^2xy = (1+ax)(1+ay),$$

이므로, 변수변환(change of variable) $X = 1+ax$ 아래에서 연산 $*$는 사실 보통의 곱셈이 모습만 바꾼 것이다. 그러면 군(group)의 모든 성질은 곱셈의 대응하는 성질에서 나오고, 우리가 버려야 할 수는 단 하나, $X=0$에 대응하는 수뿐이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\phi(x) = 1+ax$라 쓴다. $a \neq 0$이므로 ϕ는 $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{R}$로의 전단사(bijection)이고, 따라서 두 실수 u, v가 같을 필요충분조건은 $\phi(u) = \phi(v)$이다. 위의 항등식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi(x*y) = \phi(x)\,\phi(y) \qquad \text{임의의 실수} x, y. \tag{†}$$

결합법칙

양변에 각각 (†)를 두 번 쓰면

$$\phi((x*y)*z) = \phi(x*y)\,\phi(z) = \phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z),$$
$$\phi(x*(y*z)) = \phi(x)\,\phi(y*z) = \phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z).$$

실수의 곱셈은 결합법칙(associativity)을 만족하므로 두 식은 같고, ϕ가 일대일(one-to-one)이므로 $(x*y)*z = x*(y*z)$이다. 따라서 $*$는 결합법칙을 만족한다.

(직접 확인하고 싶다면, $(x*y)*z$와 $x*(y*z)$를 모두 전개하면 대칭식 $x+y+z+a(xy+yz+zx)+a^2xyz$가 된다.)

군

? **생각해 보기** 어떤 수를 빼야 하며, 왜 $\mathbb{R}$ 전체를 그대로 둘 수 없을까?

ϕ 아래에서 수 $x=-\frac{1}{a}$는 $\phi(x)=0$에 대응하는데, 0은 곱셈에 대한 역원(multiplicative inverse)이 없다. 구체적으로, 임의의 실수 y에 대하여

$$\left(-\tfrac{1}{a}\right)*y=-\tfrac{1}{a}+y-y=-\tfrac{1}{a},$$

이므로 $-\frac{1}{a}$는 모든 것을 흡수해 버리고, 어떤 수와 연산해도 항등원이 될 수 없다. 그래서

$$G=\mathbb{R}\setminus\left\{-\tfrac{1}{a}\right\},$$

로 잡는데, 이것은 정확히 $\phi(x)\neq 0$인 x들의 집합이다. 네 가지 공리를 확인하자.

닫혀 있음. $x,y\in G$이면 $\phi(x)\neq 0$이고 $\phi(y)\neq 0$이므로, (†)에 의해 $\phi(x*y)=\phi(x)\phi(y)\neq 0$이다. 따라서 $x*y\neq -\frac{1}{a}$이고, $x*y$는 당연히 실수이므로 $x*y\in G$이다. 즉 G는 연산에 대하여 닫혀 있다(closure).

결합법칙. 이는 위에서 모든 실수에 대하여 보였으므로, 특히 G의 원소에 대해서도 성립한다.

항등원. 모든 x에 대하여 $x*0=x+0+0=x$이고 $0*x=x$이며, $\phi(0)=1\neq 0$이므로 $0\in G$이다. 따라서 0이 항등원(identity)이다. (이는 곱셈의 항등원인 $\phi(0)=1$과 맞아떨어진다.)

역원. $x\in G$가 주어졌을 때 $x*y=0$, 즉 $x+y(1+ax)=0$인 y를 찾고자 한다. $1+ax\neq 0$이므로 나눌 수 있고, 따라서

$$x^{-1}=\frac{-x}{1+ax}.$$

이 역원(inverse)은 G에 속한다. 왜냐하면

$$\phi\left(\frac{-x}{1+ax}\right)=1-\frac{ax}{1+ax}=\frac{1}{1+ax}\neq 0,$$

이기 때문이다. 또한 $*$는 교환법칙을 만족하므로(식에서 $x*y=y*x$임이 분명하다) $x^{-1}*x=0$도 성립한다.

네 공리가 모두 성립하므로 $(G,*)$는 군이며(실제로는 가환군(abelian group)이다), 제외되는 수는 $-\frac{1}{a}$이다.

위수가 2인 부분군

0이 아닌 실수들의 곱셈군은 부분군(subgroup) $\{1, -1\}$을 가진다. 이것을 ϕ를 통해 거꾸로 옮기면, $\phi(x) = 1$에서 $x = 0$이고 $\phi(x) = -1$에서 $x = -\frac{2}{a}$이다. 그래서

$$H = \left\{0, -\tfrac{2}{a}\right\}.$$

를 시도해 본다. 이 둘은 G의 서로 다른 두 원소이다($a \neq 0$이므로 $-\frac{2}{a} \neq 0$이고 $-\frac{2}{a} \neq -\frac{1}{a}$이다). 직접 계산하면

$$\left(-\tfrac{2}{a}\right) * \left(-\tfrac{2}{a}\right) = -\tfrac{4}{a} + a \cdot \tfrac{4}{a^2} = 0,$$

이고, $0 * 0 = 0, 0 * \left(-\frac{2}{a}\right) = -\frac{2}{a}$이다. 따라서 H는 닫혀 있고, 항등원을 포함하며, 각 원소는 자기 자신의 역원이다. 그러므로 H는 정확히 두 원소를 가진 $(G, *)$의 부분군이다.

사실 이런 부분군은 이것 하나뿐이다. 위수(order)가 2인 군은 $h * h = e$이고 $h \neq e$인 $\{e, h\}$ 꼴인데, $h * h = 0$은 $h(2 + ah) = 0$을 뜻하므로 $h = -\frac{2}{a}$이다.

검산

$a = 1$로 놓자. 그러면 $x * y = x + y + xy = (1 + x)(1 + y) - 1$이고, 제외되는 수는 -1이며, 위수가 2인 부분군은 $\{0, -2\}$이다. 실제로 $(-2) * (-2) = -4 + 4 = 0$이다. 또한 $2 * 3 = 11$이고 $(1 + 2)(1 + 3) = 12 = 1 + 11$이므로 (†)가 예측하는 대로이다. 컴퓨터로 약 5000개의 무작위 a, x, y, z에 대하여 정확한 유리수 연산으로 항등식 (†), 결합법칙, G에서 닫혀 있음, 항등원 0, 역원 공식, 그리고 $\{0, -\frac{2}{a}\}$가 닫혀 있음을 확인하였다.

흔한 실수

- 역원 $\frac{-x}{1+ax}$ 자체가 G에 속하는지, 또는 $x * y$가 제외된 수와 결코 같지 않은지 확인하는 것을 잊는 실수. 정확히 한 점을 빼는 것을 정당화하는 공리가 바로 닫혀 있음이다.
- 부분군으로 $\{0\}$이나 $\{0, -\frac{1}{a}\}$를 제시하는 실수. 앞의 것은 원소가 하나뿐이고, $-\frac{1}{a}$는 애초에 G에 속하지 않는다.

STEP 너머

사상 $\phi(x) = 1 + ax$는 $(G, *)$에서 군 $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$로의 **동형사상**(isomorphism)이다. 즉 한 연산을 다른 연산으로 바꾸어 주는 전단사이다. 동형사상을 한번 찾아내면 모든 구조적 사실이 공짜로 옮겨 오며, 바로 그래서 $\times$에서 위수가 2인 원소가 -1뿐인 것처럼 $(G, *)$에도 위수가 2인 원소가 정확히 하나 있다. 동형사상, 그리고 두 군이 겉모습은 달라도 "같을" 수 있다는 생각은 추상대수학(abstract algebra) 첫 강의의 핵심이다. 이에 대해 읽어 보기에는

Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.