풀이

STEP III 1999, 문제 6

순수수학 • 매개변수 곡선과 넓이

STEP III 1999, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q6

핵심 아이디어

주어진 방정식은 $(x^{1/n})^2 + (y^{1/n})^2 = (a^{1/n})^2$이라는 뜻이므로, 사실은 모습을 바꾼 원이다. 따라서 원을 다룰 때와 똑같이 $x^{1/n} = a^{1/n}\cos t$, $y^{1/n} = a^{1/n}\sin t$로 놓은 다음 양변을 n제곱하면 된다. n이 홀수이기 때문에 음수의 실수 n제곱근을 취할 수 있고, 그래서 이 곡선은 네 사분면(quadrant) 모두에 걸쳐 있다.

풀이

매개변수화

n이 홀수이므로 모든 실수 x는 x와 부호가 같은 실수 n제곱근 $x^{1/n}$을 꼭 하나 가지며, $x^{2/n}$은 $(x^{1/n})^2$을 뜻한다. $X = x^{1/n}$, $Y = y^{1/n}$, $R = a^{1/n} > 0$이라 쓰면 방정식 $(*)$는

$$X^2 + Y^2 = R^2,$$

즉 반지름이 R인 원이 되고, 이 원은 $X = R\cos t$, $Y = R\sin t$로 매개변수화(parametrisation)할 수 있다. 양변을 n제곱하면(n이 홀수이므로 이는 $\mathbb{R}$에서의 전단사(bijection)이다)

$$\boxed{x = a\cos^n t, \qquad y = a\sin^n t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.}$$

를 얻는다. 원 위의 모든 점 (X, Y)가 이런 식으로 나타나므로, 곡선 위의 모든 점도 이런 식으로 나타난다.

생각해 보기 이것이 곡선을 그저 "어떤 방식으로" 한 바퀴 도는 것이 아니라, 왜 시계 반대 방향으로 도는 것일까?

사상 $(X, Y) \mapsto (X^n, Y^n)$은 각 좌표의 부호를 보존하므로 각 사분면을 자기 자신으로 보낸다. t가 0에서 2π까지 변할 때 점 $(R\cos t, R\sin t)$는 원을 시계 반대 방향으로 한 바퀴 돌며, 양의 x축, 제1사분면, 양의 y축, 제2사분면, …의 순서로 지나간다. 그 상 (x, y)도 같은 축과 사분면을 같은 순서로 지나가므로, 역시 원점 둘레를 시계 반대 방향으로 한 바퀴 돈다. (예를 들어 제1사분면에서는 $x = a\cos^n t$가 a에서 0으로 감소하는 동안 $y = a\sin^n t$는 0에서 a로 증가한다.) $n = 1$이면 이것은 익숙한 원 $x = a\cos t$, $y = a\sin t$일 뿐이다.

$n = 3$일 때의 개형

이제 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$이고, 곡선은 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$이다.

대칭성(*symmetry*). 이 방정식은 $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$, 그리고 x와 y를 맞바꾸는 변환에 대해 변하지 않는다. 따라서 곡선은 두 좌표축과 직선 $y = \pm x$에 대해 대칭이고, 제1사분면 $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$만 살펴보면 충분하다.

절편(*intercept*). $t = 0$일 때는 점 $(a, 0)$에, $t = \frac{\pi}{2}$일 때는 점 $(0, a)$에 있다. 대칭성에 의해 곡선은 $(\pm a, 0)$과 $(0, \pm a)$에서만 좌표축과 만난다. 직선 $y = x$ 위에서는($t = \frac{\pi}{4}$) 점 $(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}})$에 있으며, 이는 각 축 방향으로 약 $0.35a$에 불과하다.

기울기(*gradient*).

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3a\cos^2 t\sin t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3a\sin^2 t\cos t,$$

이므로 $0 < t < \frac{\pi}{2}$에서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t.$$

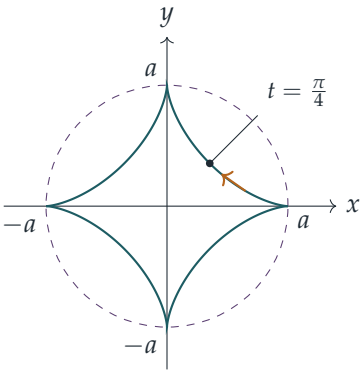
이다. 이 값은 $t \to 0$일 때 0이고, $t \to \frac{\pi}{2}$일 때 $-\infty$로 발산한다. 따라서 곡선은 $(a, 0)$에서 x축에 접하며 도달하고, $(0, a)$에서 y축에 접하며 도달한다. $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$와 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$는 $t = 0$과 $t = \frac{\pi}{2}$에서 모두 0이 된다. 제1사분면의 호는 제4사분면에서 대칭으로 옮겨진 호와 $(a, 0)$에서 만나고, 두 호 모두 그 점에서 x축에 접하므로 두 호가 뾰족한 점을 이루며 만난다. 이 곡선은 네 점 $(\pm a, 0)$, $(0, \pm a)$에서 **첨점**(*cusp*)을 가진다.

오목·볼록(*concavity*). $-\tan t$를 x에 대해 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t} > 0 \quad \text{for } 0 < t < \tfrac{\pi}{2}.$$

이다. 따라서 제1사분면의 호는 아래로 볼록(convex)하다. 즉 원처럼 바깥으로 부풀지 않고 원점 쪽으로 휘어 들어간다. 이 호는 현 $x + y = a$보다 아래에 있다. 실제로 $\cos^3 t + \sin^3 t \le \cos^2 t + \sin^2 t = 1$이고, 등호는 첨점에서만 성립한다.

이를 종합하면 꼭짓점이 네 개인 별 모양(**아스테로이드**(*astroid*))을 얻는다. 아래 그림에는 비교를 위해 반지름이 a인 원을 점선으로 함께 그렸다.



$n = 3$일 때의 넓이

위의 도함수를 이용하면

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t \\ &= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t = \tfrac{3}{4}a^2\sin^2 2t. \end{aligned}$$

이다. $\sin^2 2t = \frac{1}{2}(1-\cos 4t)$이고 $\cos 4t$를 $[0, 2\pi]$에서 적분하면 0이므로

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \pi.$$

이다. 따라서

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3a^2}{4}\cdot\pi = \boxed{\frac{3\pi a^2}{8}}.$$

이다. 곡선을 시계 반대 방향으로 돌기 때문에 이 공식이 양의 넓이를 주며, 바로 이 때문에 첫 번째 부분에서 방향이 중요했던 것이다.

검산

- 아스테로이드는 넓이가 $2a^2$인 마름모 $|x| + |y| \le a$의 내부에 있으므로, 답은 $2a^2$보다 작아야 한다. 실제로 $\frac{3\pi}{8}a^2 \approx 1.178a^2$이다.
- 공식을 쓰지 않는 검산으로, $a = 1$일 때 $4\int_0^a \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}\mathrm{d}x$를 수치적으로 계산하면 $1.178097\ldots$이 나와 $3\pi/8 = 1.1780972\ldots$과 일치한다.
- $n = 1$일 때 같은 방법을 쓰면 $x\dot{y} - y\dot{x} = a^2$이고 $A = \pi a^2$, 즉 원의 넓이가 나오니 예상대로이다.

흔한 실수

- 음수 x가 왜 허용되는지 설명하지 않고 $x = a\cos^n t$라고 쓰는 것. $x < 0$일 때 $x^{2/n}$이 의미를 갖게 하는(그리고 매개변수화가 곡선 전체를 덮게 하는) 것이 바로 n이 홀수라는 사실이다.
- 곡선을 찌그러진 원처럼 바깥으로 부푼 모양으로 그리는 것. 이계도함수를 보면 곡선은 안쪽으로 휘어 있고, 좌표축 위에 뾰족한 첨점이 있다.
- $[0, \frac{\pi}{2}]$에서만 적분하고 4를 곱하는 것을 잊거나, $-y\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$에서 부호를 틀리는 것(결국 두 항 모두 양수가 된다).

STEP 너머

이 넓이 공식은 **그린 정리**(*Green's theorem*)의 특수한 경우이다. 그린 정리는 어떤 영역 위의 적분을 그 경계를 따라 도는 적분으로 바꾸어 준다. 이것은 경계를 따라 그리면서 넓이를 재는 기계 장치인 구적기(planimeter)의 원리이기도 하다. $|x|^p + |y|^p = 1$ 같은 곡선은 해석학과 선형대수학에서 만나는 ℓ^p 노름(norm)의 "단위원"이기도 하다. 아스테로이드는 $p = \frac{2}{3}$인 경우인데, 이 곡선은 볼록하지 않으므로 노름을 주지 않는다. 아스테로이드는 또한 반지름이 네 배인 원의 안쪽을 따라 굴러가는 원 위의 한 점이 그리는 자취로도 나타난다. 이런 성격의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)을 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.