풀이

STEP III 1999, 문제 5

순수수학 • 피보나치 항등식과 수학적 귀납법

> **STEP III 1999, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q5

핵심 아이디어

이것은 피보나치 수열(Fibonacci sequence)을 $u_n = F_{n+1}$이 되도록 한 칸 밀어 놓은 것이다. 첫 번째 항등식(identity)을 보이려면 u_{n+2}와 u_{n-1}을 모두 가운데 두 항 u_{n+1}과 u_n으로 나타낸다. 그러면 교차항이 서로 소거된다. 두 배 공식(doubling formulae)은 두 명제를 함께 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다. 점화식(recurrence)을 통해 각 명제가 서로를 뒷받침하기 때문이다. 홀수 경우를 마무리하는 데 필요한 도구가 바로 첫 번째 항등식이다.

풀이

첫 번째 항등식

$n \geq 1$을 고정하면 $u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}$가 모두 정의된다. 점화식으로부터

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \qquad \text{그리고} \qquad u_{n-1} = u_{n+1} - u_n,$$

을 얻는다. 두 번째 식은 $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$에서 나온다. 각각 제곱하여 더하면

$$\begin{aligned} u_{n+2}^2 + u_{n-1}^2 &= (u_{n+1}^2 + 2u_{n+1}u_n + u_n^2) + (u_{n+1}^2 - 2u_{n+1}u_n + u_n^2) \\ &= 2(u_{n+1}^2 + u_n^2), \end{aligned}$$

이 되고, 이것이 구하는 항등식이다.

두 배 공식

$P(n)$을 다음 두 식이 모두 성립한다는 명제라 하자.

$$u_{2n} = u_n^2 + u_{n-1}^2 \qquad \text{그리고} \qquad u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2.$$

처음 몇 항은 $u_0, u_1, \cdots = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ 이다.

기저 단계(base case). $n = 1$일 때 $u_2 = 2 = 1^2 + 1^2 = u_1^2 + u_0^2$이고 $u_3 = 3 = 2^2 - 1^2 = u_2^2 - u_0^2$이다. 따라서 $P(1)$이 성립한다.

> ? **생각해 보기** 왜 두 공식을 하나씩 따로 증명하지 않고 함께 증명할까?

점화식으로 u_{2n+2}를 구하려면 u_{2n+1}과 u_{2n}이 필요하므로, $n+1$에서의 짝수 공식에는 n에서의 두 공식이 **모두** 필요하다. 또 $n+1$에서의 홀수 공식에는 $n+1$에서의 짝수 공식도 필요하다. 어느 명제도 혼자서는 다음 단계로 나아갈 수 없다.

귀납 단계(inductive step). 어떤 $n \geq 1$에 대하여 $P(n)$이 성립한다고 가정하자.

짝수 번째 항. 점화식과 $P(n)$을 차례로 쓰면

$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= u_{2n+1} + u_{2n} \\ &= (u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) + (u_n^2 + u_{n-1}^2) \\ &= u_{n+1}^2 + u_n^2, \end{aligned}$$

이고, 이것은 짝수 공식에서 n을 $n+1$로 바꾼 것이다.

홀수 번째 항. 점화식, 방금 증명한 식, 그리고 $P(n)$을 쓰면

$$\begin{aligned} u_{2n+3} &= u_{2n+2} + u_{2n+1} \\ &= (u_{n+1}^2 + u_n^2) + (u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) \\ &= 2u_{n+1}^2 + u_n^2 - u_{n-1}^2. \end{aligned}$$

이 값이 $u_{n+2}^2 - u_n^2$과 같음을 보이고 싶은데, 여기서 첫 번째 항등식이 쓰인다. $n \geq 1$이므로 첫 번째 항등식에서 $u_{n+2}^2 = 2u_{n+1}^2 + 2u_n^2 - u_{n-1}^2$을 얻고, 따라서

$$u_{n+2}^2 - u_n^2 = 2u_{n+1}^2 + u_n^2 - u_{n-1}^2 = u_{2n+3}.$$

$2(n+1)+1 = 2n+3$이고 $(n+1) \pm 1 = n+2,\ n$이므로, 이것은 홀수 공식에서 n을 $n+1$로 바꾼 것이다.

그러므로 $P(n)$이면 $P(n+1)$이다. 기저 단계와 함께, 수학적 귀납법에 의해 모든 양의 정수 n에 대하여 $P(n)$이 성립한다.

검산

$n = 5$를 넣어 보자. $u_{10} = 89$이고 $u_5^2 + u_4^2 = 64 + 25 = 89$이다. 또 $u_{11} = 144$이고 $u_6^2 - u_4^2 = 169 - 25 = 144$이다. 정확한 정수 연산으로 첫 번째 항등식은 $n \leq 299$인 모든 n에 대하여, 두 배 공식은 둘 다 $n \leq 189$인 모든 n에 대하여 확인하였다. 또한

$u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1}) = u_n(u_{n+1} + u_{n-1})$임에 주목하자. 이것은 홀수 번째 항을 나타내는 편리한 다른 형태이다.

흔한 실수

- 짝수 공식 하나만으로 귀납법을 쓰는 것: 귀납 단계에서 u_{2n+1}이 필요하므로 막혀 버린다.
- u_{-1}이 정의되지 않는 $n = 0$에서 첫 번째 항등식을 쓰는 것. 귀납 단계에서는 $n \geq 1$일 때만 이 항등식을 쓴다.
- 첨자가 보통의 피보나치 수에서 한 칸 밀려 있다는 것($u_0 = u_1 = 1$)을 잊고 잘못된 값으로 기저 단계를 확인하는 것.

STEP 너머

두 배 공식을 쓰면 N을 거듭 반으로 나누어 약 $\log_2 N$단계 만에 u_N을 계산할 수 있다. 이것이 "빠른 두 배(fast doubling)" 방법으로, 빠른 거듭제곱(fast exponentiation)과 가까운 방법이다. 그 배경에는 행렬(matrix) 항등식 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$이 있으며, 이 행렬을 제곱하면 두 공식을 한꺼번에 얻는다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 이 행렬의 거듭제곱과 고윳값(eigenvalue)을 통해 피보나치 수를 다루고, Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)에서 연분수(continued fraction)를 다루는 장에서는 연속한 피보나치 수의 비가 황금비(golden ratio)의 근사분수(convergent)로 다시 등장한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.