풀이

STEP III 1999, 문제 4

순수수학 • 오일러 공식과 다면체

> **STEP III 1999, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.9 절 **정다면체는 다섯 개뿐이다**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/platonic-solids.html

핵심 아이디어

모서리(edge)의 개수를 두 가지 방법으로 센다. 한 번은 면(face)을 하나씩 돌며 세고, 또 한 번은 꼭짓점(vertex)을 하나씩 돌며 센다. 각각의 셈은 E를 F(또는 V)로 나타내 주고, 이를 오일러(Euler)의 공식에 대입하면 F에 대한 방정식 하나만 남는다. 그 뒤의 분류는 모두 한 가지 관찰로 귀결된다. F는 양수이므로 h도 양수여야 하고, 이 조건을 만족하는 정수 쌍 (m, n)은 몇 개밖에 남지 않는다.

풀이

F에 대한 공식 유도하기

각 면은 m각형이므로 모서리를 m개 가진다. 모든 면을 돌며 각 면의 모서리를 세면 mF가 된다. 그런데 각 모서리는 정확히 두 면의 경계이므로, 이렇게 세면 모든 모서리가 두 번씩 세어진다.

$$mF = 2E.$$

마찬가지로 각 꼭짓점에서 모서리 n개가 만나므로, 꼭짓점마다 모서리를 세면 nV가 된다. 각 모서리는 끝점을 정확히 두 개 가지므로, 이 셈에서도 모든 모서리가 두 번씩 세어진다.

$$nV = 2E.$$

따라서 $E = \frac{1}{2}mF$이고 $V = \frac{2E}{n} = \frac{mF}{n}$이다. 이를 $V - E + F = 2$에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\frac{mF}{n} - \frac{mF}{2} + F = 2$$
$$F\,(2m - mn + 2n) = 4n \qquad (\text{양변에 } 2n\text{을 곱함}).$$

이제 주어진 h를 전개하면

$$4 - (n-2)(m-2) = 4 - (mn - 2m - 2n + 4) = 2m + 2n - mn,$$

이 되는데, 이는 정확히 위의 괄호 안의 식이다. 따라서 $Fh = 4n$이다. 여기서 F와 n은 양수이므로 $h \neq 0$이고, 양변을 h로 나눌 수 있다.

$$F = \frac{4n}{h}, \qquad h = 4 - (n-2)(m-2),$$

이로써 원하는 식이 증명되었다.

정다면체는 다섯 가지뿐이다

생각해 보기 공식이 아니라 기하학에서 나오는 m과 n에 대한 제약은 무엇인가?

다각형은 변이 적어도 세 개이므로 $m \geq 3$이다. 입체의 꼭짓점에서는 적어도 세 개의 면이 만나야 한다. 두 면만 한 꼭짓점에서 만나면 입체의 꼭짓점이 아니라 납작한 날개 모양이 되기 때문이다. 따라서 $n \geq 3$이기도 하다. 그러면 $m - 2 \geq 1$이고 $n - 2 \geq 1$이다.

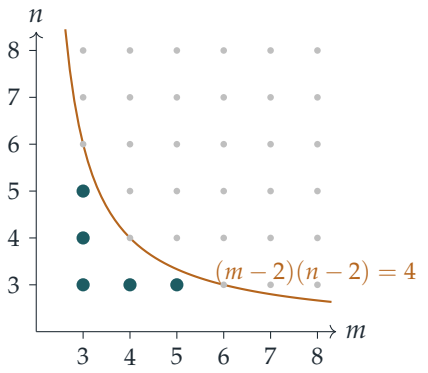
$F > 0$이고 $4n > 0$이므로, 공식에 의해 $h > 0$이어야 한다. 즉,

$$(m-2)(n-2) < 4.$$

따라서 두 양의 정수 $m-2$와 $n-2$의 곱은 $1, 2, 3$ 중 하나이고, $h = 3, 2, 1$이다. 가능한 인수분해(factorisation)는 다음뿐이다.

- $(m-2)(n-2) = 1$: $m = n = 3$이므로 $h = 3$이다.
- $(m-2)(n-2) = 2$: $(m,n) = (3,4)$ 또는 $(4,3)$이므로 $h = 2$이다.
- $(m-2)(n-2) = 3$: $(m,n) = (3,5)$ 또는 $(5,3)$이므로 $h = 1$이다.

그림도 같은 사실을 보여 준다. 표시된 점은 $m, n \geq 3$인 격자점(lattice point) 가운데 쌍곡선(hyperbola) $(m-2)(n-2) = 4$의 안쪽에 엄격하게 놓인 점들이다.



각 쌍에 대하여 $F = 4n/h$, $E = \frac{1}{2}mF$, $V = mF/n$이다.

	m	n	h	V	E	F
정사면체	3	3	3	4	6	4
정팔면체	3	4	2	6	12	8
정육면체	4	3	2	8	12	6
정이십면체	3	5	1	12	30	20
정십이면체	5	3	1	20	30	12

예를 들어 정이십면체의 경우 $F = 4 \cdot 5/1 = 20$, $E = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 20 = 30$, $V = 3 \cdot 20/5 = 12$이다.

따라서 가능한 (m, n)의 조합은 많아야 다섯 가지이다. 표에 이름이 나온 익숙한 다섯 플라톤 입체(Platonic solids)가 보여 주듯이, 각 조합은 실제로 존재한다. 그러므로 정다면체(regular polyhedron)는 정확히 다섯 가지이다.

검산

- 모든 행이 $V - E + F = 2$를 만족한다. 정십이면체의 경우 $20 - 30 + 12 = 2$이다.
- 정육면체는 $V = 8$, $E = 12$, $F = 6$인데, 이는 주사위를 보며 직접 셀 수 있다.
- m과 n을 바꾸면 V와 F가 서로 바뀌고 E는 그대로이다(정육면체와 정팔면체, 정십이면체와 정이십면체). 이것이 쌍대성(duality)이다. 각 면의 중심에 꼭짓점을 하나씩 놓으면 된다.
- 독립적인 검산: 각 꼭짓점에서의 각결손(angle deficit) $2\pi - n\pi(m-2)/m$은 양수여야 하고, V개의 꼭짓점 전체에 대한 합은 4π이다(데카르트(Descartes)의 정리). 이는 다섯 가지 모두에서 성립하며, $3 \le m, n < 200$ 범위를 컴퓨터로 탐색해도 $h > 0$인 다른 쌍은 발견되지 않았다.

흔한 실수

- 모서리를 셀 때 인수 2를 빠뜨리는 것. 각 모서리는 두 면에 속하고 끝점이 두 개이다.
- $n \geq 3$인 이유를 말하지 않는 것. 이 조건이 없으면 $n = 2$일 때 모든 m에 대해 $h = 4$가 되어 무수히 많은 "해"가 생긴다.
- 개수 세기만으로 "정확히 다섯 가지"라고 결론 내리는 것. 이 논증은 **많아야** 다섯 가지임을 보일 뿐이다. 각 경우가 존재함을 보이려면 실제 입체가 필요하다.

STEP 너머

오일러의 공식은 위상수학(topology)의 출발점이다. 수 $V - E + F$(**오일러 지표**(Euler characteristic))는 곡면을 면으로 나누는 방법과 관계없이 항상 같으므로, 구에서는 2, 원환면(torus)에서는 0 등이 된다. 원환면에서 같은 논증을 되풀이하면 정사각형 격자처럼 무수히 많은 "정규" 타일링이 나온다. 다섯 입체의 대칭군(symmetry group)은 군론(group theory) 입문 강의에서도 중심적인 예이다. 생생한 설명을 원한다면 Richeson의 *Euler's Gem*(오일러의 보석)을 읽어 보라. Armstrong의 *Basic Topology*(기초 위상수학)는 이 아이디어를 더 깊이 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.