풀이

STEP III 1999, 문제 3

순수수학 • 리만 합과 극한

> **STEP III 1999, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q3

핵심 아이디어

식 $\frac{1}{n}\sum f(1+m/n)$은 $[1,2]$ 위에 세운 너비 $\frac{1}{n}$인 얇은 직사각형 n개의 넓이의 합이고, 직사각형이 얇아질수록 이들은 곡선 아래의 넓이를 정확히 채운다. 나머지 두 극한(limit)은 같은 그림이 모습만 바꾼 것이다. 해야 할 일은 인수 $\frac{1}{n}$을 묶어 내고 각 항을 m/n만의 함수로 쓰는 것이다.

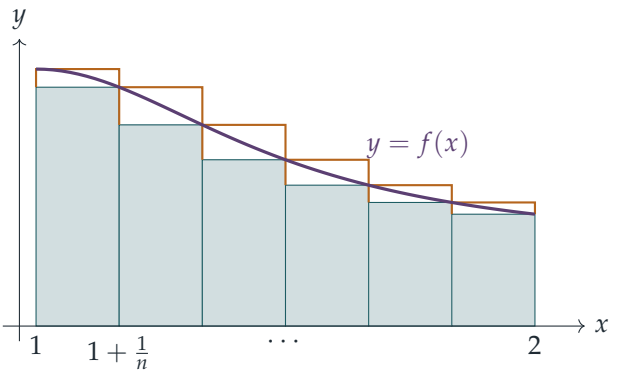
풀이

극한 공식

$[1,2]$를 너비 $\frac{1}{n}$인 띠 n개로 나눈다. m번째 띠는 $[1+\frac{m-1}{n},\ 1+\frac{m}{n}]$이다. 그 위에 높이가 띠의 오른쪽 끝에서의 f의 값 $f(1+m/n)$인 직사각형을 세운다. 그 넓이는 $\frac{1}{n}f(1+m/n)$이므로

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(1+m/n)$$

은 직사각형들의 넓이의 합이다.



그림은 감소(decreasing)하는 f를 보여 준다. 색칠한(청록색) 직사각형은 오른쪽 끝의 높이를 쓰므로 곡선 아래에 놓인다. 그 위의 호박색 계단은 왼쪽 끝의 높이를 쓸 때 얻는 직사각형을 나타내며, 이들은 곡선 위로 올라간다. 따라서

$$S_n \;\le\; \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; S_n + (\text{호박색 조각들의 넓이의 합}).$$

이제 호박색 조각을 모두 옆으로 밀어 너비 $\frac{1}{n}$인 한 기둥으로 모은다. 높이들이 차례로 소거되므로(telescope) 쌓인 전체 높이는 $f(1) - f(2)$이다. 그러므로

$$0 \;\le\; \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - S_n \;\le\; \frac{f(1)-f(2)}{n} \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{극한} n \to \infty,$$

이고 $S_n \to \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$이다. 증가하는 f도 부등식의 방향만 바꾸면 똑같이 된다. 또 웬만한 함수(이를테면 연속(continuous)이고 구간별로 단조(monotonic)인 함수)는 유한 개의 단조인 조각으로 자를 수 있고, 각 조각이 만드는 오차는 $\frac{1}{n}$ 정도의 크기이다. 이로써 다음이 정당화된다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} f(1+m/n) = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

극한 $\ln 2$

? **생각해 보기** $\dfrac{1}{n+m}$을 어떻게 $\dfrac{1}{n} f(1+m/n)$ 꼴로 만들 수 있을까?

분모에서 인수 n을 묶어 낸다.

$$\frac{1}{n+m} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+m/n} = \frac{1}{n} f(1+m/n) \qquad \text{여기서} f(x) = \frac{1}{x}.$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{1+m/n}$$
$$=\int_1^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\ln 1=\ln 2,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (여기서 f는 감소하므로 그림을 이용한 논증이 그대로 적용된다. 심지어 합이 $\ln 2-\frac{1}{2n}$과 $\ln 2$ 사이에 있다는 것까지 알려 준다.)

마지막 극한

$m=1,\ldots,n$에 대하여 m번째 항은 $\dfrac{n}{n^2+m^2}$이다. 분자와 분모를 n^2으로 나눈다.

$$\frac{n}{n^2+m^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(m/n)^2}.$$

공식은 f를 $x=1+m/n$에서 계산하므로, 이에 맞추려면 $f(x)=\dfrac{1}{1+(x-1)^2}$로 두어야 한다. 그러면 $f(1+m/n)=\dfrac{1}{1+(m/n)^2}$이 된다. 이 f는 $[1,2]$에서 감소한다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{n}{n^2+m^2}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{1+(x-1)^2}=\Big[\tan^{-1}(x-1)\Big]_1^2$$
$$=\tan^{-1}1-\tan^{-1}0=\frac{\pi}{4}.$$

(같은 방법으로, $u=x-1$로 치환하면 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$를 얻는다.)

검산

합은 직접 계산할 수 있다. $n=1000$일 때 두 번째 합은 0.69290으로 $\ln 2\approx 0.69315$와 비교되고, 세 번째 합은 0.78515로 $\pi/4\approx 0.78540$과 비교된다. 두 경우 모두 모자라는 양은 약 $\frac{1}{4000}$으로, 그림에서 얻은 한계 $\frac{f(1)-f(2)}{n}=\frac{1}{2000}$ 안에 든다. 또 두 합 모두 극한보다 약간 작게 나오는데, 오른쪽 끝의 높이를 쓰는 감소함수 f라면 마땅히 그래야 한다.

흔한 실수

- 세 번째 극한을 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$로 쓰는 것. 공식은 f를 m/n이 아니라 $1+m/n$에서 계산하므로, 1만큼의 평행이동을 f 안에 넣어야 한다.
- 마지막 항($m=n$)이 $\frac{n}{2n^2}$이고 이것이 $\frac{1}{n}f(2)$와 일치한다는 것을 잊는 것. 합은 $n+1$개의 점이 아니라 n개의 오른쪽 끝점 전체에 걸쳐 있다.

STEP 너머

이들은 리만 합(Riemann sum)이고, 그림을 이용한 논증은 리만 적분(Riemann integral)의 정의의 씨앗이다. 함수는 상합과 하합(upper and lower sums)을 서로 얼마든지 가깝게 조일 수 있을 때 적분가능(integrable)하며, 폐구간(closed interval) 위의 모든 연속함수는 이 성질을 가진다. 같은 아이디어를 거꾸로 써서 합을 적분으로 바꾸어 추정할 수도 있는데, $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$이 수렴(converge)한다는 증명이 그 예이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)에는 리만 적분에 관한 아주 읽기 쉬운 장이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.