풀이

STEP III 1999, 문제 2

순수수학 • 실근의 개수 세기

STEP III 1999, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q2

핵심 아이디어

(i)에서 도함수(derivative)는 완전제곱식과 e^x의 곱으로 인수분해되므로, 이 함수는 결코 감소하지 않으며 실제로는 순증가(strictly increasing)한다. (ii)에서 새 함수의 도함수는 정확히 $(1+x^2)e^x = k$일 때 0이 되는데, 이것은 바로 (i)의 방정식이다. 이로부터 새 함수가 극점(turning point)을 단 하나, 즉 최솟점 하나만 가진다는 것을 알 수 있다. 그다음부터는 모든 것이 $x \to -\infty$일 때 어떤 일이 일어나는지에 달려 있는데, 이때 $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$이다. 수 $2/\pi$는 바로 여기서 나온다.

풀이

소문항 (i)

곱의 미분법(product rule)에 의해

$$f'(x) = 2x\,e^x + (1+x^2)e^x = e^x\left(x^2+2x+1\right) = e^x(1+x)^2.$$

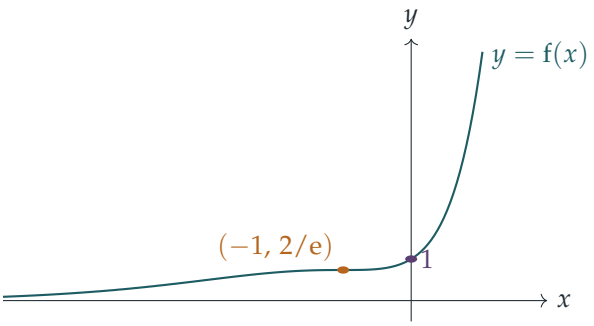
$e^x > 0$이고 $(1+x)^2 \geq 0$이므로, 요구된 대로 모든 x에 대해 $f'(x) \geq 0$이다. 등호는 $x = -1$에서만 성립한다.

생각해 보기 $f'(-1) = 0$인데, f는 정말 순증가하는가?

그렇다. $a < b$이면 $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$이고, 피적분함수는 연속이고 음이 아니며 $[a,b]$의 많아야 한 점에서만 0이 되므로 이 적분값은 0보다 크다. 정상점(stationary point) 하나만으로는 함수가 증가하는 것을 막을 수 없다. 여기서 $x = -1$은 변곡점이기도 한 정상점(stationary point of inflection)이다: f'은 그 양쪽에서 모두 양수이다.

그래프를 그리려면 다음이 필요하다.

- 두 인수가 모두 양수이므로 모든 x에 대해 $f(x) > 0$이다;
- $f(0) = 1$이고, 변곡점(point of inflection)은 $(-1, 2/e) \approx (-1, 0.74)$이다;
- $x \to \infty$일 때 $f(x) \to \infty$이다;
- $x \to -\infty$일 때 $f(x) \to 0$이다. e^x는 어떤 다항식이 증가하는 것보다도 빠르게 감소하기 때문이다($x^2 e^x \to 0$). 따라서 음의 x축이 점근선(asymptote)이다.



이제 f는 연속이고 순증가하며, $x \to -\infty$일 때 $f(x) \to 0$이고 $x \to \infty$일 때 $f(x) \to \infty$이다. 따라서 이 함수는 $(0, \infty)$의 모든 값을 취하고(중간값 정리(intermediate value theorem)), 각 값을 정확히 한 번씩 취한다(순증가). 또 ≤ 0인 값은 결코 취하지 않는데, $f > 0$이기 때문이다. 그러므로 $(1 + x^2)e^x = k$는 $k > 0$일 때 정확히 하나의 실근을 갖고, $k \leq 0$일 때는 실근을 갖지 않는다. ■

소문항 (ii)

다음과 같이 놓자.

$$g(x) = e^x - 1 - k \tan^{-1} x.$$

곧바로 $g(0) = 1 - 1 - 0 = 0$이므로 $x = 0$은 항상 근이다. 다음으로,

$$g'(x) = e^x - \frac{k}{1 + x^2} = \frac{(1 + x^2)e^x - k}{1 + x^2} = \frac{f(x) - k}{1 + x^2}.$$

두 경우 모두 $k > 0$이므로, (i)에 의해 수 a로서 $f(a) = k$를 만족하는 것이 정확히 하나 존재한다. f는 순증가하므로 $f(x) < k$는 $x < a$일 때, $f(x) > k$는 $x > a$일 때 성립한다. 따라서

$$g'(x) < 0, \text{ 단} x < a, \qquad g'(x) > 0, \text{ 단} x > a.$$

그러므로 g는 $(-\infty, a]$에서 순감소하고 $[a, \infty)$에서 순증가하며, $x = a$에서 유일한 최솟값을 갖는다. 특히 g는 a의 양쪽에 각각 많아야 하나의 근을 가지므로, 근은 모두 합쳐 많아야 두 개이다.

a는 어디에 있는가? 두 경우 모두 $k < 1 = \mathrm{f}(0)$이므로 $\mathrm{f}(a) = k < \mathrm{f}(0)$이고, 이로부터 $a < 0$이다. 그러면 $x = 0$은 증가 구간 $[a, \infty)$에 놓인다. 이것이 그 구간의 유일한 근이고,

$$\mathrm{g}(a) < \mathrm{g}(0) = 0.$$

남은 일은 g가 $(-\infty, a)$에서도 근을 갖는지 판정하는 것이다.

$x \to -\infty$일 때의 거동. $\mathrm{e}^x \to 0$이고 $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$이므로

$$\mathrm{g}(x) \to -1 + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(k - \frac{2}{\pi}\right) \quad \text{단, } x \to -\infty.$$

이 극한을 L이라 하자. g는 $(-\infty, a]$에서 순감소하므로, 그 구간에서 g의 모든 값은 L보다 작다. 이를 확인하기 위해 $x \le a$와 임의의 $x' < x$를 잡자. $y < x'$이면 언제나 $\mathrm{g}(y) > \mathrm{g}(x')$이므로, $y \to -\infty$로 보내면 $L \ge \mathrm{g}(x')$를 얻는다. 따라서 $\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(x') \le L$이다.

(a) $0 < k \le 2/\pi$. 이때 $L \le 0$이므로 $\mathrm{g}(x) < L \le 0$이 모든 $x \le a$에 대해 성립한다. a의 왼쪽에는 근이 없으므로, 방정식은 **정확히 하나의 실근**, 즉 $x = 0$을 갖는다.

(b) $2/\pi < k < 1$. 이때 $L > 0$이므로 충분히 작은 음수 x에 대해 $\mathrm{g}(x) > 0$이고, 한편 $\mathrm{g}(a) < 0$이다. 중간값 정리에 의해 $(-\infty, a)$에 근이 존재하며, g가 순감소하므로 그 구간의 근은 그것 하나뿐이다. $x = 0$과 함께, 방정식은 **정확히 두 개의 실근**을 갖는다: 음의 근 하나(a보다 작다)와 $x = 0$이다.

> **생각해 보기** 경계인 경우 $k = 2/\pi$는 왜 (a)에 속하는가?

$k = 2/\pi$일 때 왼쪽 극한은 정확히 $L = 0$이다. 감소하는 가지는 아래쪽에서 0에 다가가지만 결코 도달하지 않으므로, 두 번째 근은 나타나지 않는다. 이를 결정짓는 것이 바로 순단조성(strict monotonicity)이다.

검산

- 임의의 점들에서 f를 수치적으로 미분한 값은 $\mathrm{e}^x(1+x)^2$와 일치하며, $\mathrm{f}(-1) = 2/\mathrm{e} \approx 0.736$이다.
- $[-200, 10]$ 위의 촘촘한 격자에서 g의 부호 변화를 세어 보았다. $k = 0.05, 0.3, 0.5, 0.6$과 $2/\pi \approx 0.6366$에서는 근이 하나이고, $k = 0.65, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$에서는 근이 두 개이다. $k = 0.65$일 때 음의 근은 아주 멀리($x \approx -31$ 근처) 있는데, $L = 0.65 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.021$이 매우 작기 때문이다.
- 최솟점은 $a \approx -1.81$이고($k = 0.7$일 때), $a \to 0^-$는 $k \to 1^-$일 때 성립한다. 이는 앞뒤가 맞는다: $k = 1$에서는 $\mathrm{g}'(0) = 0$이 되어 $x = 0$이 중근(double root)이 된다.

흔한 실수

- $x = 0$이 항상 근이라는 사실을 잊고, $-\infty$에서의 부호 변화로부터 나오는 근만 세는 것.
- $\tan^{-1} x \to -\infty$가 $x \to -\infty$일 때 성립한다고 생각하는 것. 이 함수는 유계이며 $-\frac{\pi}{2}$로 수렴한다.
- $f'(-1) = 0$으로부터 f가 $x = -1$에서 극점을 갖는다고 결론짓는 것.

STEP 너머

여기서의 논증은 실해석학(real analysis)의 표준적인 기법을 보여 주는 전형적인 예이다: 어떤 구간에서 연속이고 순단조인 함수는 그 구간에서 많아야 하나의 영점을 가지며, (무한대에서의 극한과 함께 적용한) 중간값 정리는 언제 영점이 존재하는지 알려 준다. 함수의 극점들의 위치를 찾은 다음 극점과 양 끝에서 부호를 확인하여 근의 개수를 세는 방법은 롤의 정리(Rolle's theorem)와 그 따름정리들의 바탕에 있는 아이디어이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 연속성, 중간값 정리, 평균값 정리(mean value theorem)를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.