풀이

STEP III 1999, 문제 14

확률과 통계 • 조건부를 이용한 기댓값

STEP III 1999, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q14

핵심 아이디어

H1에서 상금은 첫 번째 성공이 언제 일어나는지에만 의존하므로, 기댓값(expectation)은 유한한 등차·등비 혼합 합(arithmetico-geometric sum) $\sum r\,p\,q^{r-1}$이 된다. 이런 합을 다루는 표준적인 요령은 합에서 그 합의 q배를 빼는 것이다. H2에서는 시행 횟수 N에 대하여 조건을 걸고(conditioning), H1의 답을 푸아송 분포(Poisson distribution)에 대하여 평균한다. 이를 위해서는 푸아송 합 $\sum \lambda^n x^n/n!$과 $\sum n\lambda^n x^n/n!$만 있으면 되는데, 둘 다 지수급수(exponential series)에서 얻어진다.

풀이

게임 H1

W를 파운드 단위의 상금이라 하자. 각 시행은 독립(independent)이고, 각각 확률 p로 성공한다. 첫 번째 성공이 r번째 시행에서 일어나는 것은 처음 $r-1$번의 시행이 실패하고 r번째 시행이 성공할 때이고, 오직 그때뿐이므로

$$\mathrm{P}(W=r) = q^{r-1}p \qquad (1 \le r \le n),$$

이고, 그 밖의 경우에는 $W=0$이므로 기댓값에 아무것도 더하지 않는다. 따라서

$$\mathrm{E}(W) = p\,S, \qquad \text{여기서} S = \sum_{r=1}^{n} r\,q^{r-1} = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1}.$$

q를 곱한 다음, q의 같은 거듭제곱끼리 줄을 맞추어 뺀다.

$$\begin{aligned} S - qS &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} - nq^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} - nq^n, \end{aligned}$$

여기서 등비급수(geometric series)의 합 공식을 썼는데, $q \neq 1$이므로 이 공식을 쓸 수 있다. $1-q=p$이므로 $S=\dfrac{1-q^n}{p^2}-\dfrac{nq^n}{p}$이고, 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W)=pS&=\frac{1-q^n-npq^n}{p}=\frac{1-q^n-n(1-q)q^n}{p}\\&=p^{-1}\left[1+nq^{n+1}-(n+1)q^n\right],\end{aligned}$$

이며, 이것이 구하는 결과이다.

게임 H2

허용되는 시행 횟수를 $N\sim\mathrm{Po}(\lambda)$라 하면 $\mathrm{P}(N=n)=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n/n!$이다. 다음과 같이 쓰자.

$$g(n)=p^{-1}\left[1+nq^{n+1}-(n+1)q^n\right].$$

$N=n\geq 1$이 주어지면 n번의 시행으로 H1을 하는 것이므로, 상금의 기댓값은 $g(n)$이다. $N=0$이 주어지면 아무것도 받지 못한다. 전체 기댓값의 법칙(law of total expectation)에 의하여(N에 대하여 조건을 걸면)

$$\mathrm{E}(W)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(N=n)\,g(n).$$

> **생각해 보기** $g(n)$의 세 부분은 $n=0$부터 시작하는 완전한 푸아송 합으로 다루는 것이 더 쉬울 것이다. 합을 $n=0$부터 시작해도 될까?

그렇다. $g(0)=p^{-1}[1+0-1]=0$이고, 이는 $N=0$일 때 상금이 없다는 것과 일치한다. 따라서

$$\mathrm{E}(W)=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\left[1+nq^{n+1}-nq^n-q^n\right].$$

확률의 합은 1이므로 첫째 항의 합은 1이다. 나머지 항들을 위해서는 두 급수가 필요한데, 둘 다 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^n}{n!}&=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x},\\\sum_{n=0}^{\infty}n\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^n}{n!}&=\lambda x\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}=\lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}.\end{aligned}$$

$x=q$를 대입하고, $\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda q}=\mathrm{e}^{-\lambda(1-q)}=\mathrm{e}^{-\lambda p}$임에 주목하자. 그러면

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,q^n=\mathrm{e}^{-\lambda p},\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,nq^n=\lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p}.$$

항 nq^{n+1}은 nq^n의 q배이므로, $\lambda q^2 \mathrm{e}^{-\lambda p}$만큼 기여한다. 모두 합하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W) &= \frac{1}{p}\left[1 + \lambda q^2 \mathrm{e}^{-\lambda p} - \lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p} - \mathrm{e}^{-\lambda p}\right] \\ &= \frac{1}{p}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda p}) + \frac{\lambda q(q-1)}{p}\,\mathrm{e}^{-\lambda p} \\ &= \frac{1}{p}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda p}) - \lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p},\end{aligned}$$

이며, 마지막 단계에서 $q - 1 = -p$를 이용하였다. 이것이 파운드 단위로 나타낸, 구하는 식이다.

검산

- $n = 1$인 H1: 공식은 $p^{-1}[1 + q^2 - 2q] = p^{-1}(1-q)^2 = p$를 준다. 확률 p로 £1을 받으므로 이는 옳다.
- H1에서 $n \to \infty$이면 $q^n \to 0$이고 $nq^n \to 0$이므로, 기댓값은 기하분포(geometric distribution)의 평균인 $1/p$로 수렴한다. 마찬가지로 H2는 $\lambda \to \infty$일 때 $1/p$로 수렴한다.
- λ가 작을 때 지수함수를 전개하면 $\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 p - \lambda q + O(\lambda^2) = \lambda p + O(\lambda^2)$를 얻는다. 이는 타당하다. 거의 항상 시행이 한 번도 없거나 한 번뿐이고, $\mathrm{P}(N = 1) \approx \lambda$이기 때문이다.
- 수치적으로, H1 공식은 $n \le 14$에 대하여 (분수를 이용한) 직접 계산한 합과 정확히 일치하였다. H2 공식은 유한 항까지 자른 푸아송 합과 일치하였고, $\lambda = 2$, $p = 0.4$로 4×10^5번의 게임을 모의실험한 결과는 0.836으로, 공식의 값 0.837과 비교된다.

흔한 실수

- $S - qS$의 마지막 항을 잘못 구하는 것: 합 S는 nq^{n-1}에서 끝나므로, qS를 빼면 $-nq^n$이 남는다.
- $\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda q}$가 $\mathrm{e}^{-\lambda p}$로 간단해진다는 것을 잊고, 그 결과 식 계산에서 길을 잃는 것.

STEP 너머

H2에서 사용한 합 $\sum \mathrm{P}(N = n)\,x^n$은 **확률생성함수**(probability generating function) $G_N(x) = \mathrm{E}(x^N)$의 값이고, $\sum n\,\mathrm{P}(N = n)\,x^n = xG'_N(x)$이다. 푸아송 확률변수에 대해서는 $G_N(x) = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}$이다. 생성함수는 무작위 횟수의 시행에 대하여 조건을 거는 방

법과 함께 대학 1학년 확률론의 핵심 도구이며, 예를 들어 무작위 합(random sum)과 분기 과정(branching process)을 연구할 때 쓰인다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 두 가지를 모두 명료하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.