풀이

STEP III 1999, 문제 12

확률과 통계 • 이산 결합분포

> **STEP III 1999, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q12

핵심 아이디어

결합확률(joint probability)은 j와 k에 대부분 $j+k$를 통해서만 의존하므로, 항들을 합 $n = j+k$에 따라 묶는다. 그러면 $\sum_j \frac{1}{j!(n-j)!}$이 남는데, 이것은 모습을 바꾼 이항 합이다. $n!$을 곱하면 $\sum_j \binom{n}{j} = 2^n$이 된다. 그다음부터는 모든 소문항이 지수급수(exponential series)로 귀결된다.

풀이

소문항 (i)

$n \geq 1$이라 하자. 사건 $\{X+Y=n\}$은 $j = 0, 1, \ldots, n$에 대한 사건 $\{X=j,\ Y=n-j\}$들의 서로 배반인 합집합(disjoint union)이다. 이 각 사건에서 $j+k=n$이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X+Y=n) &= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n}{j!\,(n-j)!} = \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} \\ &= \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n 2^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{-1}(2\lambda)^n}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 이항정리(binomial theorem)에 의해 $\sum_j \binom{n}{j} = (1+1)^n = 2^n$이고, $n \geq 1$일 때 $n/n! = 1/(n-1)!$임을 이용하였다.

덧붙이면, 인수 $j+k$ 때문에 $\mathrm{P}(X+Y=0) = \mathrm{P}(X=0,\ Y=0) = 0$이다.

소문항 (ii)

모든 $n \geq 0$에 대한 확률 $\mathrm{P}(X+Y=n)$의 합은 1이어야 한다. $n=0$인 항은 0이므로

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}(2\lambda)^n}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{-1}(2\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)^m}{m!} = \mathrm{e}^{-1}\, 2\lambda\, \mathrm{e}^{2\lambda},$$

이다. 여기서 $m = n-1$로 놓고 지수급수 $\sum_m t^m/m! = \mathrm{e}^t$를 이용하였다. 따라서 요구한 대로 $2\lambda\, \mathrm{e}^{2\lambda-1} = 1$이다.

소문항 (iii)

$g(x) = 2x\, \mathrm{e}^{2x-1}$이라 하자. 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-1} + 4x\, \mathrm{e}^{2x-1} = 2(1+2x)\, \mathrm{e}^{2x-1}.$$

$x > 0$이면 $1+2x$와 e^{2x-1}이 모두 양수이므로 $g'(x) > 0$이고, 따라서 g는 $x > 0$에서 순증가(strictly increasing)한다.

> ? **생각해 보기** 왜 "증가한다"는 것이 "해가 많아야 하나"라는 결론을 주는가?

$0 < x_1 < x_2$이면 $g(x_1) < g(x_2)$이므로, g는 서로 다른 두 점에서 값 1을 가질 수 없다. $\lambda > 0$이므로 (ii)에서 얻은 방정식 $g(\lambda) = 1$의 해는 많아야 하나이다.

이제 지수를 0으로 만드는 자연스러운 후보 $x = \frac{1}{2}$를 대입해 보자. $g(\frac{1}{2}) = 1 \cdot \mathrm{e}^0 = 1$이다. 따라서 $\frac{1}{2}$는 해이고, 유일성에 의해 이것이 유일한 해이다.

$$\lambda = \tfrac{1}{2}.$$

이 값을 넣으면 소문항 (i)의 결과는 $n \geq 1$에 대하여 $\mathrm{P}(X+Y=n) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{(n-1)!}$이 된다.

소문항 (iv)

$X+Y$는 방금 구한 확률로 $n \geq 1$인 값만 가지므로

$$\mathrm{E}(2^{X+Y}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\mathrm{e}^{-1}}{(n-1)!} = 2\mathrm{e}^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!} = 2\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^2 = 2\mathrm{e},$$

이다. 여기서도 $m = n-1$로 놓고 지수급수를 이용하였다(이 급수는 수렴(converge)하므로 기댓값(expectation)은 유한하다).

검산

- $\lambda = \frac{1}{2}$일 때 (i)의 공식은 $X+Y-1$이 평균이 1인 포아송 분포(Poisson distribution)를 따른다는 뜻이다. 그 확률 $\mathrm{e}^{-1}/m!$의 합은 당연히 1이므로 (ii)와 일치한다.

- $j+k<60$인 범위에서 결합확률을 수치적으로 더하면 합이 1.000000이고, $2^{j+k}\,\mathrm{P}(X=j,Y=k)$를 더하면 5.436564가 되어 $2\mathrm{e}\approx 5.436564$와 일치한다.
- (iv)를 간단히 확인해 보자. $N\sim\mathrm{Po}(1)$일 때 $2^{X+Y}=2\cdot 2^{N}$이고, 포아송 확률변수에 대해 $\mathrm{E}(s^{N})=\mathrm{e}^{s-1}$이므로 답은 $2\mathrm{e}^{1}$이다.

흔한 실수

- $n/n!=1/(n-1)!$임을 잊어서 (ii)의 급수 안에 성가신 인수 n이 남는 경우.
- $n=0$인 항을 0이 아닌 것으로 취급하는 경우. 인수 $j+k$ 때문에 이 항은 사라지며, 바로 그래서 합이 $n=1$부터 시작한다.
- (iii)에서 $\lambda=\frac{1}{2}$가 해라는 것만 보이는 경우. 다른 해가 없음을 보이려면 단조성(monotonicity)도 필요하다.

STEP 너머

$\mathrm{E}(s^{X+Y})$는 $X+Y$의 **확률생성함수**(*probability generating function*)이며, 여기서는 $s=2$에서의 값을 구한 것이다. 생성함수는 확률의 합을 멱급수로 바꾸어 주며, 대학 첫 확률론 강의에서 분포를 판별하고 적률(moment)을 구하는 표준 도구이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수와 포아송 분포를 명료하게 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.