풀이

STEP III 1999, 문제 11

역학 • 강체의 회전

STEP III 1999, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q11

핵심 아이디어

테 바퀴가 모서리에 올라서면 고정점을 중심으로 회전하는 강체(rigid body)가 되므로, 두 식이면 충분하다. 에너지 보존(conservation of energy)으로 임의의 각에서의 각속력(angular speed)을 구하고, 중심에 대한 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 회전축 방향으로 분해하여 수직항력(normal reaction)을 구한다. 이 수직항력이 0이 되는 순간 접촉이 끊어진다. 첫 번째 부분에서 구한 관성 모멘트가 바로 에너지 식에 필요한 값이다.

풀이

관성 모멘트

얇은 테 바퀴의 모든 입자는 중심 C에서 거리 a만큼 떨어져 있으므로, C를 지나고 테 바퀴의 평면에 수직인 축에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는

$$I_C = \sum \delta m \, a^2 = ma^2.$$

이다. 원주 위의 점 O는 C에서 거리 a만큼 떨어져 있고 새 축은 원래 축과 평행하므로, 평행축 정리(parallel axis theorem)에 의해

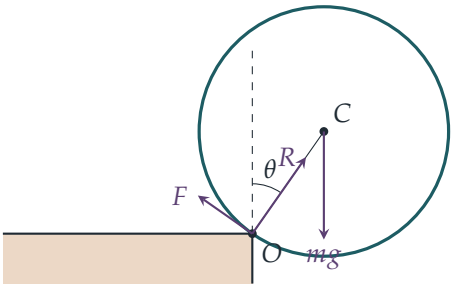
$$I_O = I_C + ma^2 = 2ma^2.$$

이다.

모서리를 넘어 구르기

테 바퀴를 균일한 강체 고리로, 탁자의 모서리를 고정점 O로 모형화한다. 두 면은 모두 거칠고, 마찰(friction)이 충분히 커서 테 바퀴가 결코 미끄러지지 않는다고 가정한다. 즉 탁자

위에서는 구르고, 모서리를 넘어갈 때는 미끄러짐 없이 O를 중심으로 회전한다. OC가 위쪽 연직 방향과 이루는 각을 θ라 하면 테 바퀴가 모서리에 도달하는 순간 $\theta = 0$이고, $\omega = \dot{\theta}$로 쓴다.



생각해 보기 테 바퀴가 모서리에 도달하는 순간, O에 대한 테 바퀴의 각속력은 얼마인가?

속력 v로 미끄러지지 않고 구르는(rolling without slipping) 테 바퀴의 각속력은 v/a이며, 매 순간 테 바퀴의 운동은 접촉점을 중심으로 한 회전이다. 모서리에 도달하는 순간 접촉점이 **바로** O이고, 테 바퀴는 그 점을 중심으로 계속 회전할 뿐이다. 테 바퀴가 접촉을 잃지 않으므로 충돌은 일어나지 않는다. 따라서 $\theta = 0$일 때 $\omega = v/a$이다.

에너지. 테 바퀴가 O와 접촉해 있는 동안 O에서 작용하는 힘은 일을 하지 않으므로(작용점이 정지해 있으므로) 역학적 에너지가 보존된다. 중심은 $a - a\cos\theta$만큼 내려왔으므로

$$\tfrac{1}{2}(2ma^2)\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2ma^2)\left(\frac{v}{a}\right)^2 + mga(1-\cos\theta), \qquad \text{즉} \qquad a\omega^2 = \frac{v^2}{a} + g(1-\cos\theta).$$

이다.

회전축 방향. 중심 C는 O를 중심으로 하는 반지름 a인 원 위를 움직이므로, 그 가속도는 C에서 O를 향하는 성분 $a\omega^2$을 가진다. 테 바퀴에 작용하는 힘은 무게 mg, OC를 따라 작용하는(즉 O에서 밀어내는) 수직항력 R, 그리고 OC에 수직인 마찰력 F이며, F는 OC 방향의 성분이 없다. CO 방향으로 분해하면

$$mg\cos\theta - R = ma\omega^2.$$

이다. 에너지 식을 대입하면

$$R = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{a} - mg(1-\cos\theta) = mg(2\cos\theta - 1) - \frac{mv^2}{a}.$$

이다. 이 값은 θ가 커질수록 감소하며, 테 바퀴는 R이 처음으로 0이 될 때 모서리와의 접촉을 잃는다. 이는

$$2g\cos\theta = g + \frac{v^2}{a}, \qquad \text{즉} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} + \frac{v^2}{2ag},$$

일 때 일어나며, 이것이 보이려던 결과이다.

? 생각해 보기 이 결과는 모든 v에 대해 타당한가?

$\theta = 0$에서 $R = m(g - v^2/a)$이고, 이는 $v^2 < ag$일 때에만 양수이다. 이것이 테 바퀴가 곧바로 접촉을 잃지 않고 모서리를 넘어 구르기 위한 조건이며 문제에서 가정하고 있는 것이다. 또한 이는 정확히 우변이 1보다 작을 조건이므로, 조건을 만족하는 각 θ가 존재한다.

덧붙여, $I_O\ddot{\theta} = mga\sin\theta$를 써서 OC에 수직인 방향으로 분해하면 $\ddot{\theta} = g\sin\theta/(2a)$와 $F = \frac{1}{2}mg\sin\theta$를 얻는다. 이것이 미끄러짐을 막기 위해 모서리가 제공해야 하는 마찰력이며, 두 면이 모두 거칠어야 하는 이유이다.

검산

- $v \to 0$이면 테 바퀴는 그냥 모서리에서 넘어지며 $\cos\theta = \frac{1}{2}$, 즉 $\theta = 60°$에서 접촉을 잃는다. $v^2 \to ag$이면 $\theta \to 0$이다. 즉 테 바퀴가 모서리에 거의 닿지 않는다. 두 극한 모두 타당하다.
- 수치적으로, $a = 0.6\,\mathrm{m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $v = 1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 두고 $\dot{\theta} = v/a$에서 시작하여 $g\cos\theta = a\dot{\theta}^2$이 될 때까지 $\ddot{\theta} = g\sin\theta/(2a)$를 단계적으로 계산하면 $\cos\theta \approx 0.69132$를 얻으며, 이는 $\frac{1}{2} + v^2/(2ag) = 0.69133$과 일치한다.

흔한 실수

- 에너지 식에 $I_C = ma^2$을 쓰거나, $\frac{1}{2}I_O\omega^2$에 병진 운동 에너지 항을 따로 더하는 것. O에 대한 회전에는 이미 중심의 운동이 포함되어 있다.
- 처음의 운동 에너지를 빠뜨리는 것. 그러면 모든 v에 대해 $\cos\theta = \frac{1}{2}$가 나온다.

STEP 너머

모서리에서 굴러떨어지는 것은 전형적인 **일방적 구속**(unilateral constraint)이다. 모서리는 밀 수는 있지만 당길 수는 없으므로, 운동 방정식은 그것이 예측하는 수직항력이 음이 아닌 동안에만 적용된다. 구면에서 미끄러져 떨어지는 입자나 볼록한 다리를 넘어가는 자동차도 같은 원리를 따른다. 대학 1학년 과정에서는 강체 동역학, 평행축 정리와 수직축 정리와 함께 이 개념을 배운다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 모든 내용을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.