풀이

STEP III 1999, 문제 10

역학 • 떨어지는 사슬의 충격량

STEP III 1999, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q10

핵심 아이디어

사슬이 무너져 내리는 동안 아직 매달려 있는 부분은 자유낙하(free fall) 상태에 있다. 즉 중력 말고는 그 부분을 당기는 것이 없다. 따라서 각 고리는 처음 있던 자리에서 그대로 떨어지고, 고리마다 달라지는 것은 떨어지는 높이뿐이다. 탁자는 각 고리를 멈추기 위해 고리 하나당 충격량(impulse) 하나를 가한다. 이를 모두 더하면 제곱근들의 합이 되고, n이 클 때 이 합은 $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$에 대한 리만 합(Riemann sum)이다.

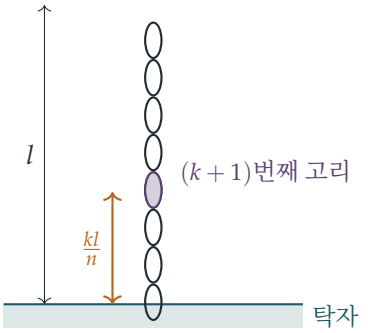
풀이

모형

각 고리의 질량은 $\frac{m}{n}$이고 길이는 $\frac{l}{n}$이다. 고리들은 매끄럽고 사슬은 완전히 유연하므로 미는 힘을 전달할 수 없다. 각 고리를 하나의 입자로 보고, 탁자에 닿는 순간 즉시 정지한다(충돌은 비탄성(inelastic) 충돌이다)고 가정한다.

생각해 보기 아래쪽 고리들은 탁자에 의해 멈추고 있는데, 왜 매달려 있는 사슬 부분은 자유낙하 상태에 있는가?

사슬을 놓았을 때 장력(tension)이 없다면 모든 고리의 가속도는 g이고, 장력이 0인 채로 떨어지는 사슬은 모순 없이 성립한다. 모든 고리가 함께 움직이므로 늘어나지 않고 서로 맞닿은 채로 있기 때문이다. 탁자는 고리를 위로 밀어서 멈추게 하는데, 유연한 사슬은 그 미는 힘을 위쪽 고리들에 전달할 수 없다. 또 고리들이 매끄러우므로 고리 사이에 마찰도 없다. 따라서 아직 공중에 있는 고리에는 중력 이외의 힘이 작용하지 않고, 각 고리는 착지할 때까지 자유낙하한다.



$(k+1)$번째 고리

$(k+1)$번째 고리 아래에는 고리가 k개 있고, 그 전체 길이는 $\frac{kl}{n}$이다. 사슬의 아래쪽 끝이 탁자에 막 닿아 있으므로, $(k+1)$번째 고리는 탁자에 닿기 전까지 거리 $\frac{kl}{n}$만큼 떨어진다. 정지 상태에서 자유낙하하므로, 도착할 때의 속력은 $v^2 = 2gs$로 주어진다.

$$v_k = \sqrt{\frac{2gkl}{n}}.$$

그런 다음 고리가 정지하므로, 운동량(momentum) 변화의 크기는

$$\frac{m}{n}\sqrt{\frac{2gkl}{n}} = \frac{m}{n}\sqrt{2gl}\,\sqrt{\frac{k}{n}},$$

이고 방향은 위쪽이다(고리는 아래 방향 운동량 $\frac{m}{n}v_k$를 잃는다). $k = 0$일 때 이 값은 0이다. 맨 아래 고리는 이미 탁자에 닿아 있기 때문이다.

전체 충격량

뉴턴(Newton)의 제3법칙(Newton's third law)에 의해, 탁자가 $(k+1)$번째 고리로부터 받는 충격량은 그 고리의 운동량 변화와 크기가 같고 방향은 아래쪽이다. 고리의 번호는 $k+1 = 1, 2, \ldots, n$이므로, 충돌로 인해 탁자가 받는 전체 충격량은

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m}{n}\sqrt{\frac{2gkl}{n}} = m\sqrt{2gl}\ \cdot\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

이다.

? **생각해 보기** $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k/n}$은 어떤 적분의 근삿값인가?

이것은 폭이 $\frac{1}{n}$인 직사각형 n개의 넓이의 합으로, 각 직사각형의 높이는 $[0,1]$을 나눈 띠들의 왼쪽 끝 $x = 0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$에서의 $\sqrt{x}$의 값이다. 따라서 n이 클 때

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \approx \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

이고, 그러므로

$$J \approx \tfrac{2}{3}\, m\sqrt{2gl},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

이 근사가 얼마나 좋은지 알아보자. $\sqrt{x}$는 증가함수이므로, 띠 $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$에서 왼쪽 끝의 높이 $\sqrt{k/n}$은 곡선보다 아래에 있고, $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$에서는 곡선보다 위에 있다. 모든 띠에 대해 더하면

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \;\le\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \;\le\; \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{즉} \quad \tfrac{2}{3}\Big(1-\tfrac{1}{n}\Big)^{3/2} \le \frac{J}{m\sqrt{2gl}} \le \tfrac{2}{3}.$$

을 얻는다. 두 경계 모두 $\frac{2}{3}$으로 수렴하므로, 상대 오차(relative error)는 많아야 약 $\frac{3}{2n}$이다.

검산

- 단위: $m\sqrt{gl}$은 질량 × 속력이므로 운동량이고, 충격량이라면 마땅히 그래야 한다.
- 수치로 확인하면, $m = 2$, $l = 3$, $g = 9.8$일 때 $\frac{2}{3}m\sqrt{2gl} \approx 10.224$이고, 정확한 합은 $n = 10$일 때 9.363, $n = 100$일 때 10.144, $n = 1000$일 때 10.216이다. 비율은 1에 가까워지며, 항상 위의 경계 안에 있다.
- 마지막으로 착지하는 고리는 거의 전체 길이 l만큼 떨어지므로, 속력이 $\sqrt{2gl}$에 가깝다. 모든 질량이 그 속력으로 도착한다면 충격량은 $m\sqrt{2gl}$이 될 것이다. 대부분의 고리는 그보다 덜 떨어지므로, 답이 이 값의 일부라는 것은 타당하다.

흔한 실수

- $(k+1)$번째 고리가 거리 $\frac{(k+1)l}{n}$만큼 떨어진다고 하는 것. 그 아래에는 고리가 k개뿐이다.
- 이미 탁자 위에 놓인 사슬의 일정한 무게까지 포함하는 것. 문제는 충돌로 인한 충격량만을 묻는다.

STEP 너머

모든 고리가 시간 $\sqrt{2l/g}$ 안에 착지하므로, 충돌만으로 탁자가 받는 평균 힘은 $\frac{2}{3}m\sqrt{2gl}/\sqrt{2l/g} = \frac{2}{3}mg$이다. 실제로 매 순간의 충돌 힘은 이미 탁자 위에 놓인 사슬 무게의 두 배이므로, 탁자 아래에 둔 저울의 눈금은 마지막 고리가 착지하는 순간 $3mg$까지 올라간다. 이처럼 질량이 연속적으로 늘거나 줄어드는 문제(떨어지는 사슬, 로켓, 빗방울)는 뉴턴 제2법칙의 가변 질량(variable-mass) 형태로 다룬다. 자세한 설명은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.