풀이

STEP III 1999, 문제 1

순수수학 • 삼차방정식의 근

STEP III 1999, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q1

핵심 아이디어

여기서 쓰는 모든 것은 비에트(Vieta)의 공식, 즉 근과 계수의 관계(Vieta's formulas)에서 나온다. 세 근이 α, β, γ인 삼차방정식(cubic) $x^3 - px^2 + qx - r = 0$에 대하여

$$\alpha + \beta + \gamma = p, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \qquad \alpha\beta\gamma = r.$$

등비수열(geometric progression)은 가운데 항을 중심으로 **곱셈적으로** 대칭이므로, 곱 r와 비 q/p가 가운데 근을 가려낸다. 반면 등차수열(arithmetic progression)은 **덧셈적으로** 대칭이므로, 이번에는 합 p가 가운데 근을 가려낸다.

풀이

소문항 (i)

세 근이 a/k, a, ak라고 하자. a/k가 의미를 가지려면 $k \neq 0$이어야 하고, 세 근의 곱이 $r \neq 0$이므로 $a \neq 0$이기도 하다. 비에트의 공식에 의해

$$\begin{aligned} p &= \frac{a}{k} + a + ak = a\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right), \\ q &= \frac{a}{k} \cdot a + a \cdot ak + \frac{a}{k} \cdot ak = a^2\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right), \\ r &= \frac{a}{k} \cdot a \cdot ak = a^3. \end{aligned}$$

p와 q에 같은 괄호가 나타난다. $p \neq 0$이므로 이 괄호는 0이 아니고, 따라서 나눌 수 있다.

$$\frac{q}{p} = a.$$

그러므로 q/p는 근(가운데 근)이다. 그러면 $q = ap$이므로

$$q^3 = a^3p^3 = rp^3, \qquad \text{즉,} \qquad q^3 - rp^3 = 0,$$

이 되어 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

이제 $r = q^3/p^3$이라 하고 $a = q/p$로 놓으면 $r = a^3$이다. 삼차방정식에 $x = a$를 대입하고 $p\,a^2 = q^2/p = q\,a$를 이용하면

$$a^3 - pa^2 + qa - r = a^3 - qa + qa - a^3 = 0,$$

이므로 q/p는 근이다.

$r \neq 0$이므로 $q \neq 0$이고, 따라서 $a \neq 0$이다. 나머지 두 근을 β, γ라 하자. 세 근의 곱은 r이므로, $a \neq 0$으로 나누면

$$a\beta\gamma = r = a^3 \quad \Longrightarrow \quad \beta\gamma = a^2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2,$$

를 얻는다.

생각해 보기 $\beta\gamma = a^2$을 어떻게 a/k, a, ak 꼴로 바꿀 수 있을까?

k를 정해야 한다. $\beta\gamma = a^2 \neq 0$이므로 β와 γ 모두 0이 아니다. $k = \gamma/a$로 정의하면 $\gamma = ak$이고 $k \neq 0$이다. 그러면

$$\beta = \frac{a^2}{\gamma} = \frac{a^2}{ak} = \frac{a}{k}.$$

따라서 세 근은 a/k, a, ak이고, 각 근은 바로 앞의 근에 k를 곱하여 얻어진다. 즉 세 근은 등비수열을 이룬다. (β와 γ가 실수가 아니면 공비 k는 복소수일 수도 있다. 이 논증에서는 두 근이 실수일 필요가 없다.)

소문항 (i)과 (ii)를 합치면, $p \neq 0$이고 $r \neq 0$일 때 세 근이 등비수열을 이룰 필요충분조건(if and only if)은 $q^3 = rp^3$임을 알 수 있다.

소문항 (iii)

필요조건(*necessity*). 세 근이 $b - d$, b, $b + d$라고 하자. 세 근의 합은 $3b = p$이므로 가운데 근은 $b = p/3$이다. 삼차방정식에 $x = p/3$을 대입하고 27을 곱하면

$$p^3 - 3p^3 + 9pq - 27r = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2p^3 - 9pq + 27r = 0.$$

충분조건(*sufficiency*). 역으로 $2p^3 - 9pq + 27r = 0$이라 하자. 위의 과정을 거꾸로 따라가면 $p/3$은 근이다. 그러면 나머지 두 근의 합은 $p - p/3 = 2p/3$이므로, 어떤 (복소수일 수도

있는) d에 대하여 두 근을 $p/3-d$, $p/3+d$로 쓸 수 있다. 세 근 $p/3-d$, $p/3$, $p/3+d$는 등차수열을 이룬다.

따라서 구하는 필요충분조건은

$$\boxed{2p^3-9pq+27r=0}.$$

검산

- 근이 $1,2,4$(등비수열)이면 $p=7$, $q=14$, $r=8$이다. 이때 $q/p=2$는 가운데 근이고, $q^3=2744=8\cdot 343=rp^3$이다.
- 근이 $1,2,3$(등차수열)이면 $p=6$, $q=11$, $r=6$이고, $2\cdot 216-9\cdot 66+27\cdot 6=432-594+162=0$이다. 등비수열 $1,2,4$에 대해서는 $686-882+216=20\neq 0$이 되어, 기대한 대로이다.
- 복소근을 갖는 것을 포함하여 수천 개의 무작위 삼차방정식에 대해 세 소문항을 모두 수치적으로 검사하였다. 모두 10^{-11} 이내의 오차로 일치하였다.

흔한 실수

- $1/k+1+k$가 왜 o이 아닌지 밝히지 않고 이것으로 나누는 것. 이 값은 p/a와 같고 $p\neq 0$이므로 o이 아니다.
- 소문항 (ii)에서 q/p가 근이라는 것과 $\beta\gamma=(q/p)^2$이라는 것만 보이고, 공비를 제시하지 않은 채 등비수열이라고 단정하는 것.
- 소문항 (iii)에서 한 방향만 증명하는 것. "필요충분조건"이라면 양방향이 모두 필요하다.

STEP 너머

비에트의 공식은 다항식의 계수가 그 근들의 **기본 대칭함수**(*elementary symmetric functions*)임을 말해 준다. 고전적인 정리에 따르면, 근에 대한 모든 대칭다항식은 이 기본 대칭함수들로 나타낼 수 있다. 이것이 다항식의 근을 언제 거듭제곱근으로 구할 수 있는지를 설명하는 갈루아(Galois) 이론의 출발점이다. 덧붙이자면, 치환 $x=y+p/3$은 삼차방정식에서 x^2 항을 없애 주는데, 그 결과로 얻는 축약 삼차방정식(depressed cubic)의 상수항은 $2p^3-9pq+27r$의 상수배이다. 이러한 아이디어가 어디로 이어지는지 알고 싶다면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.