풀이

STEP II 1999, 문제 9

역학 • 가변적인 힘에 의한 운동

STEP II 1999, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s2-q9

핵심 아이디어

가속도(acceleration)는 시간이 아니라 거리 x에만 의존하므로, 알맞은 도구는 $\ddot{x} = v\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$이다. 이것을 쓰면 운동 방정식(equation of motion)이 바로 적분할 수 있는 꼴로 바뀌어 v^2을 x의 함수로 얻을 수 있다(모습을 바꾼 에너지 방정식(energy equation)이다). 나머지는 모두 v^2이 어디에서 0이 되는지를 묻는 일이다. 그곳이 바로 파편(fragment)이 멈추고 되돌아오는 지점이다.

풀이

각 파편을 고정점 G를 지나는 직선 위에서 움직이는 입자(particle)로 모형화한다. x는 G로부터의 거리이고, $v = \dot{x}$는 속도(velocity)로, G에서 멀어지는 방향으로 움직일 때 양수이다. 처음에 $x = 0$이고 $v = u > 0$이다. 가속도는 G를 향하므로 이 부호 약속에서는 음수이다.

소문항 (i)

$x < R$이면 $\ddot{x} = -k_1 x^3$이고, $\ddot{x} = v\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰면

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -k_1 x^3.$$

변수를 분리하여 출발 시점($x = 0$, $v = u$)부터 적분하면

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}u^2 = -\tfrac{1}{4}k_1 x^4, \qquad \text{따라서} \qquad v^2 = u^2 - \tfrac{1}{2}k_1 x^4 \quad (x < R).$$

파편이 아직 바깥쪽으로 움직이는 동안에는 $v = \sqrt{u^2 - \tfrac{1}{2}k_1 x^4}$이다.

소문항 (ii)

$2a^2 = k_1R^4$이므로 (i)의 식은 $v^2 = u^2 - a^2(x/R)^4$이 된다. x가 0에서부터 증가하면 v^2은 감소하고, 다음에서 0이 된다.

$$x_0 = \left(\frac{2u^2}{k_1}\right)^{1/4}.$$

$u < a$이면 $2u^2 < 2a^2 = k_1R^4$이므로 $x_0 < R$이다.

> **생각해 보기** x_0에서 속력이 0이 되는데, 왜 그것이 파편이 더 멀리 가지 못한다는 뜻일까?

x_0에서 파편은 순간적으로 정지하지만, 그곳에서의 가속도는 $-k_1x_0^3 \neq 0$이고 G를 향한다. 따라서 파편은 평형(equilibrium) 상태가 아니며, G를 향해 되돌아가기 시작한다. 사실 x는 결코 x_0을 넘을 수 없다. 넘는다면 (i)의 식에서 $v^2 < 0$이 되기 때문이다. 파편이 도달하는 가장 먼 거리는 $x_0 < R$이므로, 요구한 대로 파편은 G로부터 거리 R에 결코 도달하지 못한다.

소문항 (iii)

먼저 $u \geq b$인 파편은 분명히 R에 도달한다. 정의로부터

$$b^2 = \tfrac{1}{2}k_1R^4 + \frac{2k_2}{3R^3} = a^2 + \frac{2k_2}{3R^3} > a^2,$$

이므로 $x \leq R$에 대하여 소문항 (i)에서

$$v^2 = u^2 - \tfrac{1}{2}k_1x^4 \geq u^2 - a^2 \geq b^2 - a^2 = \frac{2k_2}{3R^3} > 0.$$

특히 파편은 $v_R^2 = u^2 - \frac{1}{2}k_1R^4 = u^2 - a^2$인 상태로 $x = R$에 도착한다.

$x \geq R$에서 운동 방정식은 $v\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -k_2x^{-4}$이다. $x = R$부터 적분하면

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_R^2 = \frac{k_2}{3}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{R^3}\right),$$

이므로

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 - \tfrac{1}{2}k_1R^4 - \frac{2k_2}{3R^3} + \frac{2k_2}{3x^3} \\ &= u^2 - b^2 + \frac{2k_2}{3x^3} \qquad (x \geq R). \end{aligned}$$

b를 그렇게 정의한 이유가 바로 이 조합 때문이다. b^2은 G에서 무한히 먼 곳까지 탈출하는 데 드는 $\frac{1}{2}v^2$의 총 "비용"이다.

$u \geq b$이면 $u^2 - b^2 \geq 0$이고 $\frac{2k_2}{3x^3} > 0$이므로, 모든 $x \geq R$에 대하여 $v^2 > 0$이다(경계인 경우 $u = b$도 포함된다). $x \leq R$에서의 부등식과 함께 보면, 파편이 도달할 수 있는 모든 거리에서 v^2은 엄밀하게 양수이다.

속도 v는 시간에 대해 연속이고 $u > 0$에서 시작한다. 음수가 되려면 0을 지나야 하고, 그러려면 어떤 위치에서 $v^2 = 0$이어야 하는데, 방금 그런 일은 일어나지 않음을 보였다. 따라서 $v > 0$이 항상 성립한다. 즉 폭발 순간부터 파편은 언제나 G에서 멀어지는 방향으로 움직인다. ($v^2 \geq 2k_2/(3x^3)$이므로 파편은 계속 나아가며 $x \to \infty$이다.)

소문항 (iv)

이제 $a < u < b$이다. $u > a$이므로 (iii)의 논증에 따라 $[0, R]$에서 $v^2 \geq u^2 - a^2 > 0$이고, 따라서 파편은 여전히 바깥쪽으로 움직이면서 R에 도달한다. R 너머에서는

$$v^2 = \frac{2k_2}{3x^3} - (b^2 - u^2),$$

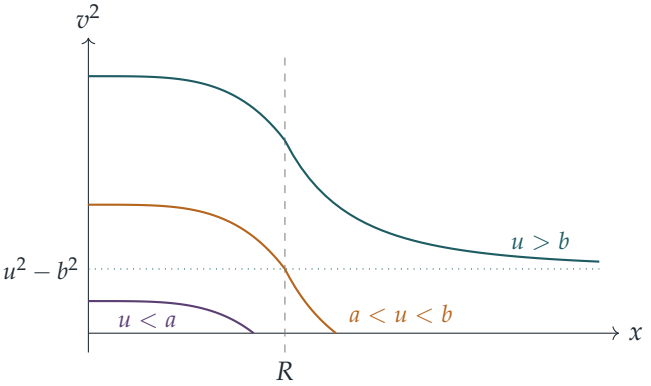
이고, 이제 $b^2 - u^2 > 0$이다. 이 값은 x가 증가함에 따라 감소하며, 다음일 때 0이 된다.

$$x^3 = \frac{2k_2}{3(b^2 - u^2)}.$$

이 점은 실제로 $x \geq R$ 영역에 있다. $u > a$이므로 $b^2 - u^2 < b^2 - a^2 = \frac{2k_2}{3R^3}$이고, 따라서 $x^3 > R^3$이다. (ii)에서와 마찬가지로 파편은 그 점에서 G를 향하는 0이 아닌 가속도 $-k_2x^{-4}$를 가진 채 멈추고, 더 나아가면 v^2이 음수가 되므로 더 멀리 갈 수 없다. G로부터의 최대 거리는

$$\boxed{x_{\max} = \left(\frac{2k_2}{3(b^2 - u^2)}\right)^{1/3}}$$

아래 그림은 $k_1 = 2, k_2 = 3, R = 1$ (따라서 $a^2 = 1, b^2 = 3$)일 때 세 종류의 처음 속력에 대하여 v^2을 x에 대해 그린 것이다. 각 파편은 자신의 곡선이 축과 만날 때까지 이동한다.



검산

- $k_1 = 2, k_2 = 3, R = 1$이면 $a = 1, b = \sqrt{3}$이다. $u = \sqrt{2}$일 때 식은 $x_{\max} = (2 \cdot 3/(3 \cdot 1))^{1/3} = 2^{1/3} \approx 1.26$을 주는데, 이는 마땅히 그래야 하듯 R을 약간 넘는 값이다.

- $u \to a^+$일 때 $b^2 - u^2 \to 2k_2/(3R^3)$이고 $x_{\max} \to R$이다. $u \to b^-$일 때 $x_{\max} \to \infty$이다. 두 결과 모두 경계에서 소문항 (ii), (iii)과 들어맞는다.
- 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보면(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법, k_1, k_2, R을 무작위로 열두 번 선택), v^2에 대한 식, $u < a$일 때의 되돌아오는 점 $(2u^2/k_1)^{1/4}$, (iv)의 $x_{\max}$ 값이 0.1% 이내로 재현되고, $u \geq b$일 때는 되돌아오는 일이 전혀 없다.

흔한 실수

- 두 번째 단계를 $v_R^2 = u^2 - \frac{1}{2}k_1R^4$을 가지고 $x = R$부터 적분하지 않고 $x = 0$부터 적분하는 것. 힘의 법칙이 R에서 바뀌므로 적분상수도 바뀐다.
- 부호를 잃어버리는 것. 가속도는 G를 향하므로 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$는 k_1x^3 또는 k_2x^{-4}에 **음의 부호**를 붙인 것이다.
- (iii)에서 $x \geq R$만 확인하고, R 안쪽에서도 v가 양수로 유지되어야 한다는 점을 잊는 것.

STEP 너머

$V'(x)$가 가속도에 음의 부호를 붙인 것과 같을 때, 양 $\frac{1}{2}v^2 + V(x)$는 위치에만 의존하는 모든 힘에 대하여 보존된다. V("퍼텐셜 우물(potential well)")를 그려 보면 어떤 운동이 유계이고 어떤 운동이 탈출하는지 한눈에 알 수 있으며, b는 바로 이 우물의 탈출 속력(escape speed)이다. 같은 추론으로 실제 중력에서의 탈출 속도를 얻을 수 있으며, 이는 비선형 진동자(nonlinear oscillator)의 위상 평면 분석(phase-plane analysis)의 출발점이기도 하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이와 같은 에너지 도표를 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.