풀이

STEP II 1999, 문제 8

순수수학 • 삼각급수

> **STEP II 1999, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q8

핵심 아이디어

$\sin k\theta$에 $2\sin\frac{1}{2}\theta$를 곱하면 곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formula)에 의해 두 코사인의 차가 되고, 그러면 합이 연쇄적으로 소거된다(telescoping). 그다음 두 소문항 모두 θ를 잘 고르는 것이 관건이다. $\theta = \pi/n$으로 두면 다루기 까다로운 코사인 $\cos(n+\frac{1}{2})\theta$가 $\cos\frac{1}{2}\theta$의 간단한 배수가 된다. (ii)에서는 반각 공식(half-angle formula)으로 $\sin^2$을 코사인으로 바꾸는데, 이때 나오는 합 $\sum k\cos k\theta$는 바로 $(*)$를 미분하면 얻어지는 것이다.

풀이

$(*)$의 증명

우변이 의미를 가지도록 $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$이라 가정한다. 항등식 $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$에 $A = k\theta$, $B = \frac{1}{2}\theta$를 대입하면

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\sin k\theta = \cos\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\theta.$$

을 얻는다. 이를 $k=0$부터 n까지 더하면 k번째 줄에서 빼진 각 $\cos(k+\frac{1}{2})\theta$가 $k+1$번째 줄에서 다시 더해지므로, 처음 항과 마지막 항만 남는다.

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \cos\left(-\tfrac{1}{2}\theta\right) - \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta = \cos\tfrac{1}{2}\theta - \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta,$$

여기서 코사인이 우함수(even function)라는 사실을 썼다. 양변을 $2\sin\frac{1}{2}\theta$로 나누면 $(*)$가 나온다.

소문항 (i)

$\theta = \pi/n$ $(n \geq 1)$으로 두면 $\sin\frac{1}{2}\theta = \sin\frac{\pi}{2n} \neq 0$이다. 그러면

$$\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta = \cos\left(\pi + \tfrac{\pi}{2n}\right) = -\cos\tfrac{\pi}{2n},$$

이므로 $(*)$의 분자는 $2\cos\frac{\pi}{2n}$이고

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}} = \cot\frac{\pi}{2n}.$$

이다. 이것은 정확한 값이다. n이 클 때 $\frac{\pi}{2n}$은 작으므로 $\cos\frac{\pi}{2n} \approx 1$, $\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{\pi}{2n}$이고, 따라서

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \approx \frac{1}{\pi/(2n)} = \frac{2n}{\pi}.$$

이다.

소문항 (ii)

배각 공식(double-angle formula)에 의해 $\sin^2\frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right)$이므로, $\theta = \pi/n$으로 두면

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta = \frac{n(n+1)}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta. \qquad (1)$$

이다. $\sum k\cos k\theta$를 구하기 위해 $(*)$를 θ에 대하여 미분한다. 그러면 좌변은 정확히 이 합이 된다. 먼저 우변을

$$\frac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\theta - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

로 나눈다. $S = \sin\frac{1}{2}\theta$, $c = \cos\frac{1}{2}\theta$라 하자. 첫째 부분을 미분하면 $-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\theta = -\frac{1}{4S^2}$이다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해 둘째 부분을 미분하면

$$\frac{(n+\frac{1}{2})\sin(n+\frac{1}{2})\theta \cdot 2S + \cos(n+\frac{1}{2})\theta \cdot c}{4S^2}.$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta = \frac{-1 + (2n+1)S\sin(n+\frac{1}{2})\theta + c\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{4S^2}.$$

이다.

생각해 보기 왜 $\theta = \pi/n$을 미분하기 전이 아니라 후에 대입하는가?

항등식 $(*)$는 ($\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$인) 모든 θ에 대하여 성립하므로 미분할 수 있다. 만약 $\theta = \pi/n$을 먼저 고정하면 하나의 수만 남아 미분할 대상이 없다. 도함수를 θ에 관한 항등식으로 얻고 나면, 원하는 어떤 값이든 대입할 수 있다.

이제 $\theta = \pi/n$으로 두자. (i)에서처럼 $(n+\frac{1}{2})\theta = \pi + \frac{1}{2}\theta$이므로 $\sin(n+\frac{1}{2})\theta = -S$, $\cos(n+\frac{1}{2})\theta = -c$이다. 그러므로

$$\sum_{k=0}^{n} k\cos\frac{k\pi}{n} = \frac{-1-(2n+1)S^2-c^2}{4S^2} = \frac{-2-2nS^2}{4S^2} = -\frac{1}{2S^2} - \frac{n}{2},$$

이다. 여기서 $c^2 = 1-S^2$을 이용했다. 이를 (1)에 대입하면

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{4} + \frac{1}{4S^2} = \frac{n(n+2)}{4} + \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{2n}}.$$

이다. 이것은 정확한 값이다. n이 클 때 $\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{\pi}{2n}$이므로 $\frac{1}{4\sin^2(\pi/2n)} \approx \frac{n^2}{\pi^2}$이고, $\frac{n(n+2)}{4} = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$에서 둘째 항은 n^2에 비해 무시할 수 있다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \approx \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\right)n^2,$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

검산

- (ii)에서 $n=1$일 때: 합은 $0 + 1\cdot\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$이고, 정확한 공식은 $\frac{3}{4}+\frac{1}{4} = 1$을 준다.
- (i)에서 $n=2$일 때: 합은 $0+1+0=1$이고, $\cot\frac{\pi}{4} = 1$이다.
- 수치적으로, $n=1000$일 때 (i)의 합은 $636.6192\ldots$로 $2n/\pi = 636.6198\ldots$와 비교되고, (ii)의 합은 $351\,821.3$으로 $(\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2})n^2$과 0.15% 이내로 차이 난다. (ii)의 상대 오차는 무시한 $\frac{n}{2}$ 항 때문에 $1/n$처럼 줄어든다.

흔한 실수

- $\cos(\pi+x) = \cos x$라고 쓰는 것: 올바른 값은 $-\cos x$이며, 바로 이 부호 때문에 (i)에서 분자가 두 배가 된다.
- (ii)에서 $\frac{1}{4}n^2$을 만들어 주는 $\frac{1}{2}\sum k = \frac{n(n+1)}{4}$ 항을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

소문항 (i)은 사실 리만 합(Riemann sum)이 모습을 바꾼 것이다. $\frac{\pi}{n}\sum\sin\frac{k\pi}{n} \to \int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2$이고, 이는 정확히 $\sum \approx 2n/\pi$라는 명제이다. 마찬가지로 (ii)는

$\frac{1}{n^2}\sum k\sin^2\frac{k\pi}{2n} \to \int_0^1 x\sin^2\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}$이라는 뜻이다. 같은 연쇄 소거 기법을 $\sum\cos k\theta$에 적용하면 푸리에 해석(Fourier analysis)의 디리클레 핵(Dirichlet kernel)을 얻는다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 리만 합과 푸리에 급수(Fourier series)를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.