풀이

STEP II 1999, 문제 7

순수수학 • 곡선 그리기

STEP II 1999, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s2-q7

핵심 아이디어

미분한 뒤 모든 항을 공통분모(common denominator)로 묶으면 분자(numerator)가 거의 완전히 사라진다. 이차항은 모두 소거되고 일차인수 하나만 남으므로 정류점(stationary point)이 곧바로 결정된다. 그래프를 그릴 때는 근호 안을 완전제곱식으로 고친다(completing the square). 그러면 곡선이 어디에서 정의되는지, $|x|$가 클 때 어떻게 행동하는지 알 수 있고, $a = 1$일 때는 제곱근이 절댓값(modulus)이 되어 곡선이 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)의 두 조각으로 바뀐다는 것도 알 수 있다.

풀이

$Q(x) = x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + (a-1)$로 놓는다.

$a > 1$일 때 정류점은 정확히 하나

$a > 1$이면 모든 x에 대해 $Q(x) \geq a - 1 > 0$이므로, 곡선은 모든 실수 x에서 정의되고 미분가능하다. $y = xQ^{-1/2}$이고 $Q'(x) = 2x - 2$이므로, 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Q^{-1/2} - \tfrac{1}{2}x(2x-2)Q^{-3/2} = \frac{Q - x(x-1)}{Q^{3/2}}$$
$$= \frac{x^2 - 2x + a - x^2 + x}{Q^{3/2}} = \frac{a - x}{(x^2 - 2x + a)^{3/2}}.$$

분모는 모든 x에 대해 양수이고 유한하므로, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$인 것은 정확히 $x = a$일 때이다. 따라서 C는 정확히 하나의 정류점을 가지며, 그 위치는

$$x = a, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{a^2 - a}} = \sqrt{\frac{a}{a-1}}$$

이다. 이것이 구하는 결과이다. $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$의 부호는 $a - x$의 부호와 같으므로, 곡선은 $x < a$에서 증가하고 $x > a$에서 감소한다. 따라서 이 점은 극대(maximum)이다.

? 생각해 보기 $a > 1$은 어디에서 쓰였는가?

두 번 쓰였다. 첫째, 이 조건 덕분에 모든 곳에서 $Q > 0$이므로 곡선에 끊어진 곳이 없고 도함수가 존재하지 않는 점도 없다. 둘째, $Q(a) = a^2 - a > 0$이므로 $x = a$가 실제로 곡선 위의 점이 된다. $a = 1$이면 정류점이 될 뻔한 $x = a = 1$이 바로 $Q = 0$인 점이 되고, 소문항 (ii)에서 문제가 생기는 것은 바로 이 때문이다.

두 그래프를 그리는 데 도움이 되는 사실이 두 가지 더 있다. $|x|$가 클 때 $\sqrt{Q} = |x|\sqrt{1 - 2/x + a/x^2} \approx |x|$이므로

$$y \to 1, \text{단} x \to +\infty, \qquad y \to -1, \text{단} x \to -\infty.$$

또 y의 부호는 x의 부호와 같고, 곡선은 원점을 기울기 $a/a^{3/2} = 1/\sqrt{a}$로 지난다.

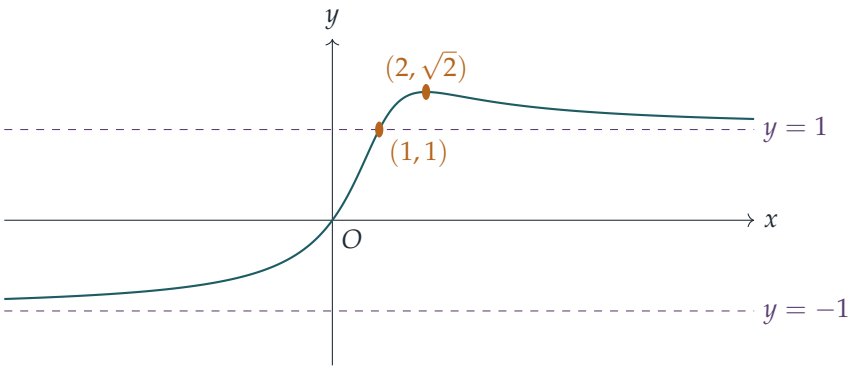
소문항 (i): $a = 2$

이때 $y = \dfrac{x}{\sqrt{(x-1)^2 + 1}}$이고 모든 x에서 정의되며, 다음과 같은 성질을 가진다.

- $(2, \sqrt{2})$에서 극대이고, $x < 2$에서 증가하며 $x > 2$에서 감소한다.
- 원점이 곡선 위에 있고, 그 점에서의 기울기는 $1/\sqrt{2}$이다.
- 수평점근선(horizontal asymptote)은 $y = 1 (x \to \infty$일 때)과 $y = -1 (x \to -\infty$일 때)이다.

곡선은 각 점근선의 어느 쪽에 있는가? $y = \pm 1$로 놓고 제곱하면 $x^2 = x^2 - 2x + 2$이므로 $x = 1$이고, (y의 부호가 x의 부호와 같으므로) 이에 맞는 것은 $y = +1$뿐이다. 따라서 곡선은 $y = 1$과 $(1, 1)$에서 단 한 번 만난다. 곡선은 모든 $x > 1$에서 $y = 1$보다 위에 있으며, 극대점을 지난 뒤 위쪽에서 점근선을 향해 내려온다. 곡선은 $y = -1$과는 만나지 않으므로 항상 $y = -1$보다 위에 있고, x가 $-\infty$에서부터 증가함에 따라 $y = -1$에서 멀어지며 올라간다.

(더 자세히 알고 싶다면: 한 번 더 미분하면 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = (2x^2 - 7x + 4)/Q^{5/2}$이므로 변곡점(point of inflection)은 $x = \frac{1}{4}(7 \pm \sqrt{17})$, 즉 대략 $x \approx 0.72$와 $x \approx 2.78$에 있다. 그래프를 그리는 데 이것까지 필요하지는 않지만, 이것으로 그래프의 모양을 설명할 수 있다.)



소문항 (ii): $a = 1$

이제 $Q = (x-1)^2$이므로 $x = 1$은 제외되고, 제곱근은 양의 제곱근이므로

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|.$$

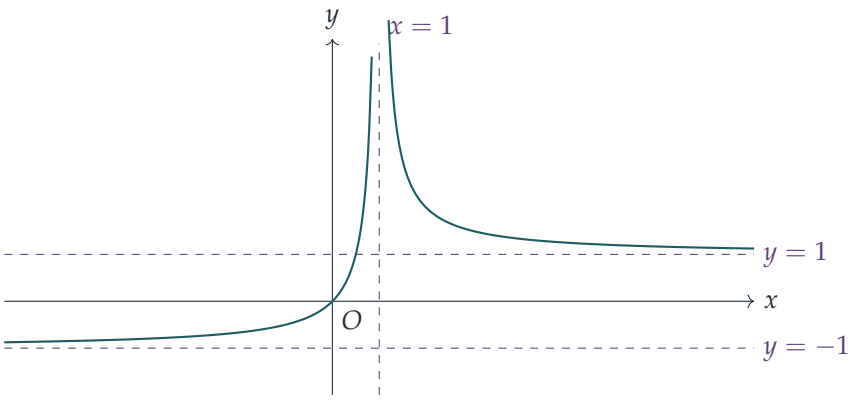
따라서

$$y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x}, & x < 1, \\ \dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

각 가지(branch)는 $x = 1$을 중심으로 하는 직각쌍곡선의 일부이다.

- $x < 1$일 때: y는 증가하며(도함수가 $1/(1-x)^2 > 0$), -1($x \to -\infty$일 때 위쪽에서 다가감)에서 출발하여 원점을 기울기 1로 지나고, $x \to 1^-$일 때 $+\infty$로 간다.
- $x > 1$일 때: y는 감소하며(도함수가 $-1/(x-1)^2 < 0$), $x \to 1^+$일 때의 $+\infty$에서 1을 향해 내려온다($x \to \infty$일 때 위쪽에서 다가감).

직선 $x = 1$은 수직점근선(vertical asymptote)이며, **양쪽** 모두에서 $y \to +\infty$이다(분자는 1에 가깝고 분모는 작은 양수이기 때문이다). 정류점은 없다. $a > 1$인 곡선들의 극대점은 높이가 $\sqrt{a/(a-1)}$이므로, $a \to 1^+$일 때 무한히 멀리 밀려 올라가 버린 것이다. 일반적인 공식도 이와 일치한다. $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (1-x)/|x-1|^3$은 결코 0이 되지 않기 때문이다.



검산

- 수치적으로, 도함수 공식 $(a-x)/Q^{3/2}$는 무작위로 고른 수천 개의 점에서 유한차분(finite difference)으로 구한 도함수와 일치하며, 부호를 차례로 조사해 보면 여러 $a>1$ 값에 대해 부호가 바뀌는 곳이 정확히 한 곳이다.
- $a=2$일 때: $y(2)=2/\sqrt{2}=\sqrt{2}\approx 1.414$, $y(1)=1$이고, $y(10^6)\approx 1.000001$, $y(-10^6)\approx -0.999999$이므로 곡선이 점근선에 어느 쪽에서 다가가는지가 확인된다.
- $a=1$일 때: $y(0.999)\approx 999$, $y(1.001)\approx 1001$로, 앞에서 말한 대로 둘 다 큰 양수이다.
- $a\to\infty$일 때 극댓값 $\sqrt{a/(a-1)}$은 1로 수렴하는데, 이는 타당하다. a가 매우 크면 곡선은 원점 근처에서 거의 $x/\sqrt{a}$와 같고, 볼록 솟은 부분이 평평해지기 때문이다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $\sqrt{(x-1)^2}=x-1$로 쓰는 것. 그러면 모든 곳에서 $y=x/(x-1)$이 되어 왼쪽 가지가 틀리게 되는데, 이 가지는 $x\to-\infty$일 때 $+1$로 가고 $x\to 1^-$일 때 $-\infty$로 가게 된다.
- 곡선의 양 끝 모두에 점근선 $y=1$을 주는 것. $\sqrt{x^2}=|x|$이므로 $x\to-\infty$일 때의 극한은 -1이다.
- $a>1$일 때 분모가 결코 0이 되지 않음을 보이는 것을 잊는 것. 이것이 없으면 "분자는 $x=a$에서만 0이다"라는 사실만으로는 정류점이 정확히 하나라는 것이 아직 증명되지 않는다.

STEP 너머

여기서 다룬 곡선족은 $a = 1$에서 성격이 갑자기 바뀐다. 극대점이 하나인 매끄러운 곡선이 수직점근선을 사이에 둔 두 개의 분리된 가지로 바뀌는 것이다. 곡선족의 정성적인 모양이 매개변수에 따라 어떻게 달라지는지 연구하는 것이 분기 이론(bifurcation theory)의 출발점이며, $\sqrt{x^2} = |x|$와 $x \to \pm\infty$일 때의 극한(limit)을 다룰 때 필요한 주의는 바로 대학 1학년 해석학(analysis)이 엄밀하게 다듬는 그 주의이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 극한과 연속성(continuity)을 제대로 다루는 모습을 볼 수 있는 친절한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.