풀이

STEP II 1999, 문제 6

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 1999, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q6

핵심 아이디어

분수 $\frac{ax+b}{cx+d}$의 도함수(derivative)는 상수를 $(cx+d)^2$으로 나눈 꼴이다. 따라서 피적분함수(integrand)가 $\frac{1}{(x+3)^2}$에 $\frac{x+1}{x+3}$ 또는 $\frac{x+2}{x+3}$의 함수를 곱한 꼴이면, 그 분수를 새 변수로 치환(substitution)할 때 $\frac{1}{(x+3)^2}$이 완전히 흡수되고, 남는 것은 기껏해야 $\int \ln y \, \mathrm{d}y$이다. 나머지 두 적분은 로그의 법칙(laws of logarithms)으로부터 얻어진다.

풀이

도함수

몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

분자의 x 항이 소거되어 상수만 남는다. 바로 이 점이 문제 전체를 풀리게 한다.

첫 번째 적분

$y = \dfrac{x+1}{x+3}$이라 하자. 이것은 $a=1, b=1, c=1, d=3$인 $(*)$ 꼴이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3-1}{(x+3)^2} = \frac{2}{(x+3)^2}, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y.$$

$x = 0$일 때 $y = \frac{1}{3}$이고, $x = 1$일 때 $y = \frac{1}{2}$이다. $\int \ln y \, dy = y \ln y - y$ ($u = \ln y$로 놓은 부분적분(integration by parts))를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2} \ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right) dx &= \frac{1}{2}\int_{1/3}^{1/2} \ln y \, dy = \frac{1}{2}\Big[y \ln y - y\Big]_{1/3}^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\ln 3 + \tfrac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{6}\ln 3 - \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{12},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$와 $\ln \frac{1}{3} = -\ln 3$을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다. 이 적분을 I_1이라 하자.

짝이 되는 적분

생각해 보기 $x^2 + 3x + 2$는 방금 사용한 치환과 무슨 관계가 있을까?

이 식은 $(x+1)(x+2)$로 인수분해되므로

$$\frac{x^2+3x+2}{(x+3)^2} = \frac{x+1}{x+3} \cdot \frac{x+2}{x+3} \qquad \text{그리고} \qquad \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+1}{x+3} \Big/ \frac{x+2}{x+3}.$$

따라서 마지막 두 적분에 나오는 로그는 모두 $\ln \frac{x+1}{x+3}$과 $\ln \frac{x+2}{x+3}$의 합과 차로 나타난다($0 \le x \le 1$에서 이 분수들은 모두 양수이다). 그러므로 적분이 하나 더 필요하다.

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2} \ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right) dx.$$

$y = \dfrac{x+2}{x+3}$이라 하자. 이번에는 $a = 1, b = 2, c = 1, d = 3$이므로 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(x+3)^2}$이고, 적분 구간은 $y = \frac{2}{3}$과 $y = \frac{3}{4}$가 된다.

$$\begin{aligned}J &= \int_{2/3}^{3/4} \ln y \, dy = \Big[y \ln y - y\Big]_{2/3}^{3/4} \\ &= \tfrac{3}{4}(\ln 3 - 2\ln 2) - \tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{3}(\ln 2 - \ln 3) + \tfrac{2}{3} \\ &= \frac{17}{12}\ln 3 - \frac{13}{6}\ln 2 - \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

나머지 두 적분

$\ln \frac{x^2+3x+2}{(x+3)^2} = \ln \frac{x+1}{x+3} + \ln \frac{x+2}{x+3}$이므로 두 번째 적분은

$$\begin{aligned}I_1 + J &= \left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{17}{12}\right)\ln 3 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{13}{6}\right)\ln 2 - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{12} \\ &= \frac{19}{12}\ln 3 - \frac{29}{12}\ln 2 - \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

이다. $\ln\frac{x+1}{x+2} = \ln\frac{x+1}{x+3} - \ln\frac{x+2}{x+3}$이므로 세 번째 적분은

$$\begin{aligned} I_1 - J &= \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{17}{12}\right)\ln 3 - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{13}{6}\right)\ln 2 \\ &= \frac{23}{12}\ln 2 - \frac{5}{4}\ln 3, \end{aligned}$$

이다. 여기서 상수항 $-\frac{1}{12}$끼리는 소거되었다.

검산

- $[0,1]$에서 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 $I_1 \approx -0.07352$, $J \approx -0.02878$이고, 두 번째와 세 번째 적분은 각각 ≈ -0.10230과 -0.04473이다. 모두 정확한 값과 소수점 아래 열째 자리까지 일치한다.
- 대략적인 범위: $\int_0^1 (x+3)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$이고, $\ln\frac{x+1}{x+2}$는 $\ln\frac{1}{2} \approx -0.69$와 $\ln\frac{2}{3} \approx -0.41$ 사이에 있다. 따라서 세 번째 적분은 대략 -0.058과 -0.034 사이에 있어야 하고, 실제로 -0.0447은 그 사이에 있다.
- $[0,1]$에서 모든 피적분함수는 음수이다(로그 안의 분수가 모두 1보다 작다). 따라서 세 답은 모두 음수여야 하고, 실제로 그렇다.

흔한 실수

- 첫 번째 치환에서 인수 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리는 것: 거기서는 $ad - bc = 2$이지만, 두 번째 치환에서는 1이다.
- 적분 구간을 바꾸지 않거나, 치환한 뒤에도 x의 구간 0과 1을 그대로 두는 것.
- $\frac{x+1}{x+2}$에 대해 새로운 치환을 시도하는 것: 가능은 하지만 $(x+3)^{-2}$을 y로 나타낸 식이 복잡해진다. 로그를 쪼개는 편이 훨씬 빠르다.

STEP 너머

$ad - bc \neq 0$인 $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ 꼴의 사상을 **뫼비우스 변환**(*Möbius transformation*)이라 한다. 두 뫼비우스 변환의 합성은 2×2 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 곱에 대응하고, $ad - bc$는 행렬식(determinant)이다. 도함수에 이 값이 나타나는 것은 이 때문이다. 복소해석학(complex analysis)에서 뫼비우스 변환은 정확히 확장된 평면(extended plane)의 등각(conformal) 전단사(bijection)이며, 원과 직선을 원과 직선으로 보낸다. 니덤(Needham)의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에 이에 관한 아름다운 장이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.