풀이

STEP II 1999, 문제 5

순수수학 • 삼각방정식

> **STEP II 1999, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q5

핵심 아이디어

자연스러운 풀이 방법은 두 가지이다. 하나는 $\cos\alpha$를 미지수로 삼는 것이다. $\sin\alpha$를 한쪽으로 모으고 양변을 제곱한 뒤 $\sin^2+\cos^2=1$을 이용하면 $\cos\alpha$에 대한 이차방정식(quadratic)을 얻는다. 다른 하나는 $5\cos x+12\sin x$를 하나의 코사인 $13\cos(x-\beta)$로 나타내는 것인데, 이 방법을 쓰면 이차방정식의 두 근이 모두 실제로 나타난다는 것도 알 수 있다. 마지막 부분에서 $\alpha<\frac{3}{4}\pi$는 $\cos\alpha$에 대한 명제가 된다. 코사인은 $[0,\pi]$에서 감소(decreasing)하기 때문이다. 결국 문제는 근호가 포함된 두 수(surd)를 비교하는 것으로 귀결된다.

풀이

$\cos\alpha$의 두 값

$c=\cos\alpha$라 하자. 주어진 방정식에서 $12\sin\alpha=7-5c$이다. 양변을 제곱하고 $\sin^2\alpha=1-c^2$을 이용하면

$$144(1-c^2)=49-70c+25c^2,$$
$$169c^2-70c-95=0.$$

근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$c=\frac{70\pm\sqrt{70^2+4\cdot169\cdot95}}{2\cdot169}=\frac{70\pm\sqrt{69120}}{338}.$$

$69120=576\times120=24^2\times120$이므로 $\sqrt{69120}=24\sqrt{120}$이다. 따라서

$$\cos\alpha=\frac{35-12\sqrt{120}}{169}\qquad\text{또는}\qquad\cos\alpha=\frac{35+12\sqrt{120}}{169},$$

이것이 구하는 결과이며, 다른 값은 $\dfrac{35+12\sqrt{120}}{169}$이다.

> **생각해 보기** 제곱을 하면 거짓 해가 생길 수 있다. 두 값이 모두 실제로 원래 방정식의 해에서 나오는가?

그렇다. 하나의 코사인으로 나타낸 꼴을 보면 그 이유를 알 수 있다. $\cos\beta = \frac{5}{13}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$인 예각(acute angle)을 β라 하자. 그러면

$$5\cos x + 12\sin x = 13\cos(x-\beta),$$

이므로 주어진 방정식은 $\cos(x-\beta) = \frac{7}{13}$이라는 뜻이다. $\cos\gamma = \frac{7}{13}$인 예각을 γ라 하면 $\sin\gamma = \frac{\sqrt{169-49}}{13} = \frac{\sqrt{120}}{13}$이다. 해는 $x = \beta \pm \gamma + 2k\pi$이고,

$$\cos(\beta\pm\gamma) = \cos\beta\cos\gamma \mp \sin\beta\sin\gamma = \frac{35\mp 12\sqrt{120}}{169}.$$

따라서 각 부호가 모두 실제 해를 준다. $\alpha = \beta+\gamma$는 빼기 부호에, $\alpha = \beta-\gamma$는 더하기 부호에 해당한다.

제2사분면의 해

$\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi$라 하자. 그러면 $\cos\alpha < 0$이다. $\sqrt{120} > 10$이므로 $35+12\sqrt{120} > 0$이고, 따라서 이 근은 제외된다. 또한 $12\sqrt{120} > 120 > 35$이므로 다른 근은 음수이다. 그러므로

$$\cos\alpha = \frac{35-12\sqrt{120}}{169}.$$

코사인은 $[0,\pi]$에서 순감소한다. α와 $\frac{3}{4}\pi$가 모두 이 구간에 속하므로

$$\alpha < \tfrac{3}{4}\pi \iff \cos\alpha > \cos\tfrac{3}{4}\pi = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

따라서 $\dfrac{12\sqrt{120}-35}{169} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 즉 $12\sqrt{120}-35 < \dfrac{169}{\sqrt{2}}$임을 보이면 된다.

> **생각해 보기** 계산기 없이, 그리고 음수일지도 모르는 것을 제곱하지 않고 이 두 수를 어떻게 비교할 수 있을까?

먼저 $\sqrt{120}$을 대략적으로 어림한다. $120 < 121$이므로 $\sqrt{120} < 11$이고, 따라서

$$12\sqrt{120} - 35 < 132 - 35 = 97.$$

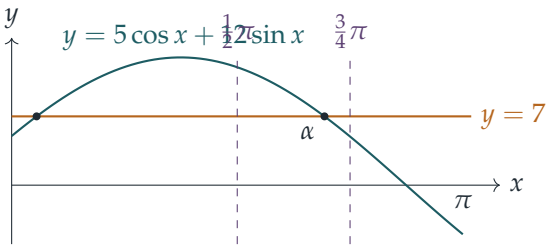
이제 $97 < \dfrac{169}{\sqrt{2}}$, 즉 $97\sqrt{2} < 169$임을 보이면 충분하다. 양변이 모두 양수이므로 이는 양변을 제곱한 부등식과 동치이다.

$$2\times 97^2 = 18\,818 < 28\,561 = 169^2,$$

이고 이는 참이다. 이를 종합하면

$$\cos\alpha = -\frac{12\sqrt{120}-35}{169} > -\frac{97}{169} > -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\tfrac{3}{4}\pi,$$

이고, 코사인은 $[0,\pi]$에서 감소하므로 $\alpha < \frac{3}{4}\pi$이다. 이로써 증명이 끝난다.



검산

- 수치적으로 $[0,2\pi)$에서의 근은 $x \approx 0.1738$과 $x \approx 2.1782$이다. 이들의 코사인 값은 0.98493과 -0.57073으로, $(35 \pm 12\sqrt{120})/169$와 일치한다.
- 제2사분면의 근은 2.1782이고, 그래프에서 보듯이 $\frac{3}{4}\pi \approx 2.3562$보다 작다. 여유도 충분하다. $\cos\alpha \approx -0.571$을 $-1/\sqrt{2} \approx -0.707$과 비교하면 된다. 그래서 $\sqrt{120} < 11$이라는 대략적인 어림으로도 충분한 것이다.
- 이차방정식이 맞는지 확인하는 방법으로, 두 근의 곱은 $-\frac{95}{169}$, 합은 $\frac{70}{169}$이다.

흔한 실수

- 부호를 확인하지 않고 부등식을 제곱하는 것. 여기서 $12\sqrt{120}-35$와 $169/\sqrt{2}$는 모두 양수이지만, 그 이유를 밝혀야 한다.
- 코사인이 $[0,\pi]$에서 **감소**하여 부등호의 방향이 바뀐다는 것을 잊는 것. $\alpha < \frac{3}{4}\pi$는 $\cos\alpha > -\frac{1}{\sqrt{2}}$에 대응한다.
- 제2사분면에서 양수인 근이 왜 제외되는지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

마지막 부분은 엄밀한 어림(rigorous estimation)의 작은 연습 문제이다. 다루기 까다로운 양을 더 간단한 한계로 바꾸고, 그래도 여유가 남는지 확인한다. 해석학(analysis)의 많은 부등식이 바로 이런 방식으로 증명된다. 코사인 값에서 각으로 넘어가는 단계에서는 순단

조(strictly monotonic) 함수가 순서를 보존(또는 역전)한다는 사실을 이용하는데, 이는 해석학 입문 과정에서 배우는 역함수(inverse function)의 바탕이 되는 아이디어이다. 부등식을 이용한 엄밀한 증명에 대해 더 알고 싶다면 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.