풀이

STEP II 1999, 문제 4

순수수학 • 이항계수 항등식

STEP II 1999, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s2-q4

핵심 아이디어

두 다항식(polynomial)이 항등적으로 같으면, x의 각 거듭제곱의 계수(coefficient)가 서로 같다. 그래서 x^n의 계수가 우리가 원하는 합이 되도록 두 이항전개(binomial expansion)의 곱을 고른 다음, 같은 계수를 그 곱의 더 간단한 형태로부터 계산한다. 실제로 선택해야 할 것은 어떤 두 인수를 곱할지뿐이다. 한 인수에서 x를 $-x$로 바꾸면 (i)에 필요한 부호가 생기고, 한 인수를 미분(differentiation)하면 (ii)에 필요한 추가 인수 t가 생긴다.

풀이

첫 번째 결과

이항정리(binomial theorem)에 의해

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r.$$

이 식 두 개를 서로 곱한다. x^n 항은 $0 \le s \le n$인 어떤 s에 대하여 첫 번째 괄호에서 x^s를, 두 번째 괄호에서 x^{n-s}를 택하여 얻어진다. 따라서 $(1+x)^n(1+x)^n$에서 x^n의 계수는

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}\binom{n}{n-s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2,$$

이다. 여기서 계승 공식으로부터 분명한 대칭성(symmetry) $\binom{n}{n-s} = \binom{n}{s}$를 사용하였다. 항등식(identity)의 다른 쪽에서, $(1+x)^{2n}$의 x^n의 계수는 $\binom{2n}{n}$이다. 두 다항식은 항등적으로 같으므로 x^n의 계수도 같다.

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2 = \binom{2n}{n}.$$

소문항 (i)

부호가 번갈아 나타나야 하므로, 첫 번째 인수를 $(1-x)^n = \sum_r \binom{n}{r}(-1)^r x^r$로 바꾸고 항등식

$$(1-x)^n(1+x)^n \equiv (1-x^2)^n.$$

을 사용한다. 앞에서와 마찬가지로 좌변의 x^n 항은 첫 번째 괄호의 x^s와 두 번째 괄호의 x^{n-s}에서 나오므로, x^n의 계수는

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\binom{n}{n-s} = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}^2.$$

이다. 우변의

$$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{2k}$$

는 x의 짝수 거듭제곱만 포함한다. n이 짝수이므로 x^n은 실제로 나타나는데, 바로 $2k=n$, 즉 $k=n/2$일 때이고, 그 계수는 $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$이다. 계수를 비교하면

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}^2 = (-1)^{n/2}\binom{n}{n/2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (같은 논증으로 n이 홀수일 때는 합이 0임을 알 수 있다. 그 때는 $(1-x^2)^n$에 x^n 항이 없기 때문이다.)

소문항 (ii)

? **생각해 보기** $\binom{n}{t}$ 옆에 인수 t가 나타나게 하려면 어떻게 해야 할까?

미분을 하면 된다. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^t = t\,x^{t-1}$이기 때문이다. 이항전개를 미분하면

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}x^{t-1}.$$

을 얻는다. 이제 여기에 $(1+x)^n = \sum_u \binom{n}{u}x^u$를 곱하고 항등식

$$n(1+x)^{n-1}(1+x)^n \equiv n(1+x)^{2n-1}.$$

을 사용한다. 좌변에서 x^{n-1} 항은 첫 번째 괄호의 $t\binom{n}{t}x^{t-1}$과 두 번째 괄호의 $\binom{n}{n-t}x^{n-t}$의 곱에서 나오므로, x^{n-1}의 계수는

$$\sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}\binom{n}{n-t} = \sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}^2.$$

이다. 우변에서 $n(1+x)^{2n-1}$의 x^{n-1}의 계수는 $n\binom{2n-1}{n-1}$이다. 마지막으로

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{2n}{n}\cdot\frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!} = 2\binom{2n-1}{n-1},$$

이므로, 계수를 비교하고 두 배 하면

$$\sum_{t=1}^{n} 2t\binom{n}{t}^2 = 2n\binom{2n-1}{n-1} = n\binom{2n}{n}.$$

다른 방법: 깔끔한 대칭성 논증이 있다. t를 $n-t$로 바꾸고 $\binom{n}{n-t} = \binom{n}{t}$를 사용하면 $\sum_{t=0}^{n} t\binom{n}{t}^2 = \sum_{t=0}^{n}(n-t)\binom{n}{t}^2$임을 알 수 있다. 같은 합에 대한 이 두 표현을 더하면, 첫 번째 결과에 의해

$$\sum_{t=0}^{n} 2t\binom{n}{t}^2 = n\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}^2 = n\binom{2n}{n}$$

을 얻고, $t=0$인 항은 0이다.

검산

$n=4$를 택하면 파스칼의 삼각형(Pascal's triangle)의 해당 행은 $1,4,6,4,1$이다. 그러면 $1+16+36+16+1 = 70 = \binom{8}{4}$이고, 부호가 번갈아 나타나는 합은 $1-16+36-16+1 = 6 = (-1)^2\binom{4}{2}$이며, $2(1\cdot 16 + 2\cdot 36 + 3\cdot 16 + 4\cdot 1) = 280 = 4\times 70$이다. 또한 세 항등식 모두 39 이하의 모든 n에 대하여 정확히 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 우변에는 짝수 거듭제곱만 있으므로, 바로 n이 짝수라는 사실 덕분에 x^n이 나타난다는 점을 잊는 것.
- 소문항 (ii)에서 엉뚱한 거듭제곱을 비교하는 것: 미분한 뒤에는 지수가 하나씩 줄어들므로 x^n이 아니라 x^{n-1}을 보아야 한다.

STEP 너머

첫 번째 항등식은 방데르몽드 항등식(Vandermonde's identity) $\sum_s \binom{m}{s}\binom{n}{k-s} = \binom{m+n}{k}$의 특수한 경우이며, 이 항등식에는 세기를 이용한 증명도 있다. 여자 m명과 남자 n명 중에서 k명을 뽑을 때, 여자를 몇 명 뽑을지 먼저 정하는 것이다. 다항식을 수열을 기록하는 장치로 사용하는 것이 바로 **생성함수**(*generating functions*)의 방법이며, 이는 조합론(combinatorics)과 확률론(probability)의 핵심 도구이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 책 전체에서 생성함수를 사용하며, Siklos의

Advanced Problems in Mathematics(고급 수학 문제)에는 이런 유형의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.