풀이

STEP II 1999, 문제 3

순수수학 • 수학적 귀납법

STEP II 1999, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s2-q3

핵심 아이디어

e^{-x^3}을 처음부터 거듭 미분하지 않는다. 대신 n계 도함수를 $\mathrm{e}^{-x^3}S_n(x)$로 쓰고 그것을 한 번 더 미분한다. 그러면 S_{n+1}을 S_n과 S_n'으로 나타내는 점화식(recurrence)이 얻어지고, 문제의 모든 부분이 이 하나의 관계식에서 나온다. 구체적인 다항식, 귀납법, 차수와 최고차항의 계수, 그리고 마지막 부등식까지 모두 그렇다.

풀이

점화식

정의에 따라

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^3}) = \mathrm{e}^{-x^3}S_n(x).$$

곱의 미분법(product rule)으로 한 번 더 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(\mathrm{e}^{-x^3}) = \mathrm{e}^{-x^3}S_n'(x) - 3x^2\mathrm{e}^{-x^3}S_n(x),$$

이고, 양변에 e^{x^3}을 곱하면

$$\boxed{S_{n+1}(x) = S_n'(x) - 3x^2S_n(x).}$$

을 얻는다. 이 식은 모든 $n \geq 0$에 대해 성립하며, 여기서 $S_0(x) = 1$이다(0계 도함수는 함수 자신이다).

S_2와 S_3

$S_0 = 1$에서 점화식을 쓰면 $S_1 = 0 - 3x^2 = -3x^2$이고, 이는 직접 계산해도 알 수 있다. 그러면

$$S_2 = S_1' - 3x^2 S_1 = -6x - 3x^2(-3x^2) = 9x^4 - 6x,$$

이므로 요구된 결과가 나온다. 점화식을 다시 적용하면

$$\begin{aligned} S_3 &= S_2' - 3x^2 S_2 = (36x^3 - 6) - 3x^2(9x^4 - 6x) \\ &= 36x^3 - 6 - 27x^6 + 18x^3, \end{aligned}$$

이므로

$$S_3(x) = -27x^6 + 54x^3 - 6.$$

귀납법

더 강한 명제를 증명한다. 추가 비용이 들지 않으면서 다음 질문에도 답이 되기 때문이다.

$P(n)$: $S_n(x)$는 차수(*degree*)가 $2n$이고 최고차항의 계수(*leading coefficient*)가 $(-3)^n$인 다항식(*polynomial*)이다.

기저 단계. $S_1(x) = -3x^2$는 차수가 2이고 최고차항의 계수가 $-3 = (-3)^1$이므로 $P(1)$이 성립한다. ($S_0 = 1$이므로 $P(0)$도 성립한다.)

귀납 단계. $P(k)$가 성립한다고 가정하면

$$S_k(x) = (-3)^k x^{2k} + (\text{차수가 다음보다 작은 항들: } 2k).$$

다항식의 도함수는 다항식이고 $3x^2 S_k$도 다항식이므로, $S_{k+1} = S_k' - 3x^2 S_k$는 다항식이다. 그 차수를 알기 위해 두 부분을 따로 살펴본다.

- S_k'의 차수는 많아야 $2k - 1$이다.
- $-3x^2 S_k(x) = -3(-3)^k x^{2k+2} + (\text{낮은 차수의 항}) = (-3)^{k+1} x^{2k+2} + \cdots$.

> ? **생각해 보기** S_k'이 $-3x^2 S_k$의 최고차항을 상쇄할 수 있을까?

그럴 수 없다. S_k'의 차수는 많아야 $2k - 1$로 $2k + 2$보다 한참 작으므로 x^{2k+2} 항에 영향을 줄 수 없다. 따라서 S_{k+1}의 차수는 정확히 $2k + 2 = 2(k + 1)$이고, 최고차항의 계수는 $(-3)^{k+1}$(0이 아님)이다. 이것이 바로 $P(k + 1)$이다.

수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 $n \geq 1$에 대해 $P(n)$이 성립한다. 따라서 $S_n(x)$는 차수가 $2n$인 다항식이고, x^{2n}의 계수는 $(-3)^n$이다. 이는 $S_2(9 = (-3)^2$, 차수 4)와 $S_3(-27 = (-3)^3$, 차수 6)과도 일치한다.

마지막 부분

$S_n'(a) = 0$이라 하자. 점화식에 $x = a$를 대입하면 도함수 항이 사라진다.

$$S_{n+1}(a) = S_n'(a) - 3a^2 S_n(a) = -3a^2 S_n(a).$$

따라서

$$S_n(a)\, S_{n+1}(a) = -3a^2 \big(S_n(a)\big)^2 \le 0,$$

이다. $a^2 \ge 0$이고 $\big(S_n(a)\big)^2 \ge 0$이기 때문이다. 등호는 $a = 0$ 또는 $S_n(a) = 0$일 때에만 성립한다. 이로써 증명이 끝난다.

검산

- 최고차항: S_3는 $(-3)^3 x^6 = -27x^6$으로 시작해야 하고, 실제로 그렇다.
- S_3의 상수항: $x = 0$ 근처에서 $\mathrm{e}^{-x^3} = 1 - x^3 + \cdots$이므로 0에서의 3계 도함수는 $-3! = -6$이다. 이는 $S_3(0) = -6$과 일치한다.
- 정류점(stationary point): $S_3'(x) = -162x^5 + 162x^2$는 $x = 1$에서 0이 된다. 이때 $S_3(1) = 21$이고 $S_4(1) = -3 \cdot 21 = -63$이므로 곱은 $-1323 \le 0$이다.
- 또한 서른 개의 무작위 유리수 점 a에서 $\mathrm{e}^{-(a+h)^3}$의 정확한 테일러 급수(Taylor series)와 $S_0, \ldots, S_9$를 대조했고, $[-4, 4]$에 있는 $S_1, \ldots, S_8$의 모든 정류점에서 부등식을 확인했다.

흔한 실수

- 차수가 왜 **정확히** $2n + 2$인지 설명하지 않는 것. 최고차항의 계수가 0이 아니고 S_k'이 그것을 상쇄할 수 없다는 점이 필요하며, 그래서 귀납 가정에 최고차항의 계수를 함께 넣어 두는 것이 유리하다.
- "S_n은 다항식이다"만 증명하고 차수는 패턴에서 추측하는 것. 문제는 차수를 귀납 논증 자체에서 얻어 내라고 요구한다.

STEP 너머

여기 나온 다항식들은 에르미트(Hermite) 다항식의 사촌뻘로, 에르미트 다항식은 e^{-x^2}에 같은 기법을 적용하여 정의된다("로드리게스 공식(Rodrigues formula)"). 이 다항식들은 우리 것과 비슷한 점화식을 만족하며, 확률론과 양자 조화 진동자(quantum harmonic oscillator)에서 등장한다. 마지막 부등식은 이런 점화식이 다항식족 전체의 영점과 극점(turning points)이 어디에 놓이는지를 어떻게 제어하는지 처음으로 엿보게 해 준다.

Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서는 급수해를 다루는 장에서 에르미트 방정식을 만난다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.