풀이

STEP II 1999, 문제 2

순수수학 • 이차식의 판별식

> **STEP II 1999, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q2

핵심 아이디어

모든 것은 $(*)$의 판별식(discriminant)에 달려 있다. x의 계수에 인수 2가 들어 있으므로 판별식의 4분의 1인 $\frac{1}{4}(b^2 - 4ac)$가 특히 깔끔한 꼴이 되며, 이것은 n에 대한 이차식(quadratic)으로 나타난다. 따라서 각 소문항은 이번에는 n을 변수로 하는 **두 번째** 이차식의 부호에 관한 문제가 된다.

풀이

풀이 전체에서 $pn^2 + q \geq 0$이라고 가정한다. 그러면 제곱근이 실수가 되고 $(*)$는 실수 계수를 갖는 보통의 이차방정식이 된다. (이 조건은 $q > 0$ 또는 $q \geq 0$인 소문항 (i)과 (iii)에서는 저절로 성립한다.) $a = n$, $b = 2\sqrt{pn^2 + q}$, $c = rn + s$라 하면, 이 방정식이 실근(real root)을 가질 필요충분조건은 $b^2 - 4ac \geq 0$, 즉 $\frac{1}{4}b^2 - ac \geq 0$이다. 이제

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}b^2 - ac &= (pn^2 + q) - n(rn + s) \\ &= (p - r)n^2 - sn + q. \end{aligned}$$

$f(n) = (p - r)n^2 - sn + q$라 하자. 그러면

$$(*)\text{는 실근을 갖지 않는다} \iff f(n) < 0.$$

소문항 (i)

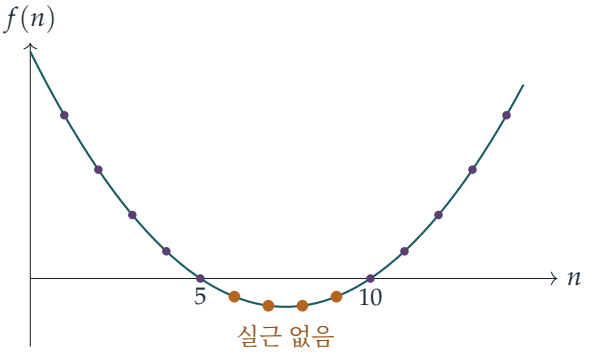
여기서는 $p - r = 1$이므로

$$f(n) = n^2 - 15n + 50 = (n - 5)(n - 10).$$

이것은 정확히 $5 < n < 10$일 때 음수이다. n은 양의 정수이므로, $(*)$가 실근을 갖지 않는 것은 정확히

$$n \in \{6, 7, 8, 9\}.$$

일 때이다. $n = 5$와 $n = 10$에서는 $f(n) = 0$이므로 실수인 중근(repeated root)이 존재하고, 따라서 이 값들은 제외된다.



소문항 (ii)

이제 $p < r$이므로 f의 최고차항의 계수(leading coefficient) $p - r$는 음수이다. f를 실수 변수 t에 대한 이차식으로 생각하자.

$$f(t) = (p - r)t^2 - st + q.$$

이 식의 판별식은

$$s^2 - 4(p - r)q,$$

이고, 가정 $4q(p - r) > s^2$에 의해 이것은 음수이다.

> **생각해 보기** f의 판별식이 음수라는 사실이 왜 $f(n)$의 부호에 대해 무언가를 알려주는가?

판별식이 음수인 이차식은 실수 영점을 갖지 않으므로, 그 그래프는 축과 만나지 않고 모든 실수 t에 대해 한 가지 부호를 유지한다. 최고차항의 계수가 음수이면 그래프는 위로 볼록한 포물선이므로 그 부호는 음이다. 구체적으로 완전제곱식(completing the square)으로 고치면

$$f(t) = (p - r)\left(t - \frac{s}{2(p - r)}\right)^2 + \frac{4q(p - r) - s^2}{4(p - r)},$$

이고 두 항은 모두 음수이거나 0이다. 첫째 항은 $p - r < 0$이기 때문이고, 둘째 항은 분자가 양수이고 분모가 음수이기 때문이다. 둘째 항은 엄격하게 음수이므로 모든 실수 t에 대해 $f(t) < 0$이다.

특히 모든 양의 정수 n에 대해 $f(n) < 0$이므로, 어떤 n의 값에 대해서도 $(*)$는 실근을 갖지 않는다. 이로써 증명이 끝난다.

가정으로부터 $q < 0$이 강제된다는 점에 주의하자. $p - r < 0$이고 $4q(p-r) > s^2 \geq 0$이므로 q는 음수여야 한다. 따라서 작은 n에 대해서는 $pn^2 + q$가 실제로 음수가 될 수 있고, 제곱근이 실수라는 우리의 기본 가정이 여기서 중요해진다. (허수 계수를 허용한다면 $x = 0$이 근이 될 수 있다. $p = 1, r = 2, s = -2, q = -10, n = 1$로 확인해 보라.)

소문항 (iii)

이제 $n = 1, p - r = 1, q = s^2/8 \geq 0$이므로 $p + q > 0$이고 계수들은 실수이다. 여기서

$$f(1) = 1 - s + \frac{s^2}{8} = \frac{s^2 - 8s + 8}{8}.$$

실근이 존재할 필요충분조건은 $f(1) \geq 0$, 즉

$$s^2 - 8s + 8 \geq 0.$$

이다. $s^2 - 8s + 8 = 0$의 근은

$$s = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 32}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2},$$

이므로 $s^2 - 8s + 8 = \left(s - (4 - 2\sqrt{2})\right)\left(s - (4 + 2\sqrt{2})\right)$이다. 이 곱은 정확히 s가 두 근 사이의 열린구간 밖에 있을 때 음이 아니다. 따라서 $(*)$가 실근을 가질 필요충분조건은

$$s \leq 4 - 2\sqrt{2} \quad \text{또는} \quad s \geq 4 + 2\sqrt{2},$$

이고, 이로써 증명이 끝난다. 모든 단계가 거꾸로도 성립하며, 바로 이 점이 "필요충분조건"의 양쪽 방향을 모두 보장해 준다. 두 끝점에서는 근이 중근이 된다.

검산

- (i)에서 $n = 7$로 놓으면 $\frac{1}{4}b^2 = 3 \cdot 49 + 50 = 197$이고 $ac = 7 \cdot 29 = 203$이므로 $\frac{1}{4}b^2 - ac = -6 < 0$이다. $n = 11$로 놓으면 $413 - 11 \cdot 37 = 6 > 0$이다.
- (iii)에서 $4 - 2\sqrt{2} \approx 1.1716$이고 $4 + 2\sqrt{2} \approx 6.8284$이다. $s = 4$이면 $f(1) = 1 - 4 + 2 = -1 < 0$이 되어, 예상대로 두 값 사이의 구간 안에 있다.
- 컴퓨터로 (i)에 대해 n을 1부터 199까지 조사하고, (ii)의 무작위 사례 약 5백만 개를 시험하고, (iii)에 대해 s의 무작위 값 10^5개를 시험했다. 모두 위의 결과와 일치했다.

흔한 실수

- (i)에서 $n = 5$와 $n = 10$을 포함하는 것. 이때 판별식은 0이므로 실수인 (중)근이 존재한다.
- (ii)에서 큰 n에 대해서만 $f(n) < 0$임을 확인하는 것. 판별식 조건의 핵심은 작은 n을 포함하여 **모든 곳에서** f가 음수라는 것이다.
- x의 계수에 있는 인수 2를 잊어서 판별식에서 $4(pn^2 + q)$를 엉뚱한 자리에 두는 것.

STEP 너머

여기서 쓴 방법, 즉 매개변수를 새로운 변수로 보고 그에 대한 이차식의 부호를 묻는 것은 다항식(polynomial)의 근이 계수에 어떻게 의존하는지를 연구하는 출발점이다. 대학에서는 이것이 고차 다항식의 판별식으로 이어지고, 이차형식(quadratic form) $at^2 + bt + c$가 음의 정부호(negative definite)일 필요충분조건이 $a < 0$이고 $b^2 < 4ac$라는 생각으로 이어진다. 바로 이 판정법을 두 변수로 확장하면 다변수 함수의 정류점(stationary point)을 분류할 수 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 세심한 판별식 논증에 바탕을 둔 STEP 문제가 훨씬 더 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.