풀이

STEP II 1999, 문제 12

확률과 통계 • 베이즈 정리

> **STEP II 1999, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q12

핵심 아이디어

이 문제는 모수가 남아 있는 상태의 베이즈(Bayes) 정리(Bayes' theorem)이다. 전확률 법칙(law of total probability)으로 $\mathrm{P}(S)$를 구하고 나면 두 조건부 확률(conditional probability)은 모두 p에 대한 간단한 유리함수(rational function)가 되고, 각각 허용된 구간에서 단조(monotonic)이다. 따라서 각 검사관의 절차에서 "최댓값"은 구간 $0 \le p \le \frac{1}{3}$의 끝점에서 나타나며, 흥미로운 부분은 이것이 단 하나의 관측으로 추정하는 일에 대해 무엇을 말해 주는가이다.

풀이

조건부 확률

임의로 고른 칩이 각각 A, B, C에서 만들어졌다는 사건을 A, B, C라 하고, 그 칩이 정상이라는 사건을 S라 하자. 이 세 사건은 표본공간(sample space)을 분할(partition)하며,

$$\mathrm{P}(A) = 2p, \quad \mathrm{P}(B) = p, \quad \mathrm{P}(C) = 1 - 3p,$$
$$\mathrm{P}(S \mid A) = \tfrac{7}{10}, \quad \mathrm{P}(S \mid B) = \tfrac{8}{10}, \quad \mathrm{P}(S \mid C) = \tfrac{9}{10}.$$

이다. 전확률 법칙에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S) &= 2p \cdot \tfrac{7}{10} + p \cdot \tfrac{8}{10} + (1 - 3p) \cdot \tfrac{9}{10} \\ &= \tfrac{1}{10}(14p + 8p + 9 - 27p) = \tfrac{1}{10}(9 - 5p).\end{aligned}$$

이다. $0 \le p \le \frac{1}{3}$ 전체에서 $9 - 5p > 0$이므로 이것으로 나눌 수 있다. 베이즈 정리에 의해

$$\mathrm{P}(A \mid S) = \frac{\mathrm{P}(S \mid A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(S)} = \frac{\frac{14p}{10}}{\frac{9-5p}{10}} = \frac{14p}{9 - 5p},$$

이고, 마찬가지로

$$\mathrm{P}(C \mid S) = \frac{\frac{9}{10}(1-3p)}{\frac{1}{10}(9-5p)} = \frac{9(1-3p)}{9-5p} = \frac{9-27p}{9-5p}.$$

이다.

첫 번째 검사관의 추정값

p가 0에서 $\frac{1}{3}$까지 증가하면 분자 $14p$는 증가하고 양수인 분모 $9-5p$는 감소하므로, $\mathrm{P}(A \mid S)$는 순증가한다. (같은 말로, 그 도함수(derivative)는 $126/(9-5p)^2 > 0$이다.) 따라서 최댓값은 오른쪽 끝점 $p = \frac{1}{3}$에서 나타나며, 그 값은

$$\frac{14/3}{9-5/3} = \frac{14/3}{22/3} = \frac{7}{11}.$$

이다. 그러므로 첫 번째 검사관의 추정값은 $\hat{p} = \frac{1}{3}$이다.

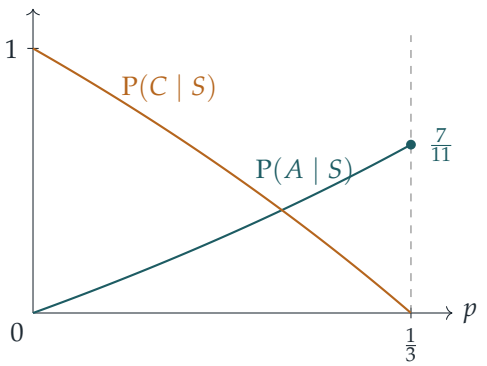
두 번째 검사관의 추정값

> **생각해 보기** $\mathrm{P}(C \mid S)$는 증가하는가, 감소하는가? p가 커지면 분자와 분모가 모두 감소한다.

분자와 분모가 같은 방향으로 움직이면 답을 바로 읽어 낼 수 없으므로, 몫의 미분법(quotient rule)으로 미분한다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{9-27p}{9-5p} = \frac{-27(9-5p)+5(9-27p)}{(9-5p)^2} = \frac{-243+135p+45-135p}{(9-5p)^2} = \frac{-198}{(9-5p)^2} < 0.$$

따라서 $\mathrm{P}(C \mid S)$는 $[0, \frac{1}{3}]$에서 순감소하고, 최댓값은 $p = 0$에서 나타나며 그 값은 1이다. 두 번째 검사관의 추정값은 $\hat{p} = 0$이다.



논평

두 검사관은 똑같이 타당한 단 하나의 관측에 같은 방법을 적용했는데도, 허용된 범위의 정반대 양 끝에 이른다. 바로 $\hat{p} = \frac{1}{3}$(C에서 나온 칩이 하나도 없음)과 $\hat{p} = 0$(모든 칩이 C에서 나옴)이다. 각 추정값은 그저 "내 칩을 만든 제조사가 가능한 한 흔해지게 하는 p의 값"일 뿐이며, 크기가 1인 표본은 필연적으로 이런 결과를 낳는다. 두 번째 추정값은 첫 번째 검사관의 칩과도 모순되는데, $p = 0$이라는 것은 A가 칩을 하나도 만들지 않는다는 뜻이기 때문이다. 어느 추정값도 믿을 만하지 않다. 관측 하나에 담긴 정보는 p를 추정하기에 턱없이 부족하며, (각 제조사별 개수를 포함한) 더 큰 표본이 필요하다.

칩이 정상이라는 사실이 거의 아무런 역할도 하지 않는다는 점도 눈여겨볼 만하다. "정상이고 A에서 나옴"의 우도(likelihood)는 $\frac{7}{10} \cdot 2p$이며, 이는 $2p$ 자체와 같은 곳에서 최대가 된다. 인수 $\frac{7}{10}$은 p에 의존하지 않기 때문이다.

검산

- $p = 0$이면 모든 칩이 C에서 나오므로 $\mathrm{P}(C \mid S)$는 1, $\mathrm{P}(A \mid S)$는 0이어야 한다. 두 공식 모두 이와 일치한다.
- 마찬가지로 $\mathrm{P}(B \mid S) = 8p/(9 - 5p)$이고, 세 조건부 확률의 합은

$$\frac{14p + 8p + 9 - 27p}{9 - 5p} = 1.$$

  이다.
- $p = 0.2$일 때 공식은 $\mathrm{P}(A \mid S) = 0.35$, $\mathrm{P}(C \mid S) = 0.45$를 준다. 칩 400 000개를 시뮬레이션한 결과는 0.3505와 0.4505였다.

흔한 실수

- 도함수를 0으로 놓고 극점(turning point)을 찾는 것. 극점은 없다. 두 최댓값은 모두 $[0, \frac{1}{3}]$의 끝점에서 나타난다.
- $\mathrm{P}(C \mid S)$에는 세심한 논증이 필요하다는 점을 잊는 것. 분자와 분모가 모두 감소하므로 "분자가 작아진다"는 것만으로는 충분하지 않다.

STEP 너머

두 검사관이 하고 있는 일은 사실상 최대우도추정(maximum likelihood estimation), 즉 자신이 관측한 것이 가장 일어날 법해지는 모수 값을 고르는 일이다. 관측이 하나뿐이면 최대

우도추정값은 모수 공간(parameter space)의 경계에 놓이는 경우가 많은데, 이는 이 방법이 제대로 작동하려면 데이터가 충분히 많아야 한다는 경고이다. 베이즈주의자(Bayesian)라면 대신 p에 사전분포(prior distribution)를 두고 칩 하나하나를 볼 때마다 이를 갱신할 것이며, 이렇게 하면 단 하나의 관측으로부터 이런 극단적인 결론을 내리는 일을 피할 수 있다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 두 관점을 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.