풀이

STEP II 1999, 문제 11

역학 • 포물체와 움직이는 표적

> **STEP II 1999, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q11

핵심 아이디어

표적은 원 위에 머무르므로, 포탄은 O로부터 정확히 거리 R인 지점에서 수평면에 떨어져야 한다. 또한 포는 언제든지 표적이 도달할 위치를 향하도록 돌릴 수 있다. 따라서 모든 것은 하나의 포물체(projectile)에 관한 두 가지 사실, 곧 사정거리(range)와 비행 시간(time of flight)으로 귀결된다. 회전각은 $\beta = \omega T$이고, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$을 이용하여 α를 소거하면 사차방정식(quartic)이 나온다. 마지막 부분은 비에타 공식(Vieta's formulas)과 원의 현(chord)으로 해결된다.

풀이

포탄을 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받아 움직이는 입자로 모형화한다. 포탄은 원을 포함하는 수평면 위의 점 O에서 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$로 발사된다.

소문항 1: $V^2 < gR$인 경우

(발사가 이루어지는 평면 안에서) 지면을 따르는 축과 연직 위쪽 축을 잡는다. 시각 t에서

$$x = Vt\cos\alpha, \qquad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

포탄은

$$T = \frac{2V\sin\alpha}{g}, \qquad \text{일 때 수평 거리} \qquad x(T) = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{V^2\sin 2\alpha}{g}.$$

인 지점에서 평면으로 돌아온다($y = 0, t > 0$). $\sin 2\alpha \le 1$이므로, 어떤 연직 평면에서 쏘든 포탄은 O로부터 V^2/g보다 먼 곳에 떨어질 수 없다. 표적은 항상 평면 위에서 O로부터 거리

R인 곳에 있으므로, 명중하려면 $R \le V^2/g$, 즉 $V^2 \ge gR$이어야 한다. 따라서 $V^2 < gR$이면 포탄은 결코 표적을 맞힐 수 없고, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 2: β에 대한 방정식

이제 $V^2 > gR$이라 하자. 포탄은 시각 T에 거리 R에서 표적을 맞히므로

$$T = \frac{2V\sin\alpha}{g}, \qquad R = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

표적은 일정한 각속도 ω로 돌므로 $\beta = \omega T$이고, 따라서

$$\sin\alpha = \frac{g\beta}{2V\omega}.$$

이를 사정거리 식에 대입하면

$$\cos\alpha = \frac{gR}{2V^2\sin\alpha} = \frac{gR}{2V^2}\cdot\frac{2V\omega}{g\beta} = \frac{R\omega}{V\beta}.$$

이제 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$로부터

$$\frac{g^2\beta^2}{4V^2\omega^2} + \frac{R^2\omega^2}{V^2\beta^2} = 1,$$

이고, 양변에 $4V^2\omega^2\beta^2$을 곱하면

$$g^2\beta^4 - 4\omega^2V^2\beta^2 + 4R^2\omega^4 = 0,$$

이 되어 구하는 방정식을 얻는다.

? **생각해 보기** 값이 왜 최대 네 개도, 없는 것도 아니고 정확히 두 개일까?

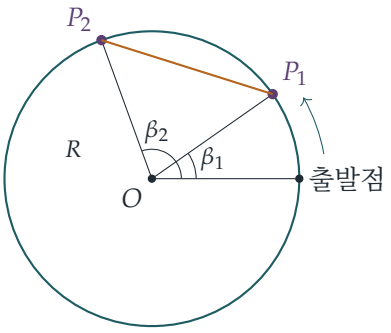
β^2에 대한 이차방정식으로 보면 판별식(discriminant)은

$$16\omega^4V^4 - 16g^2R^2\omega^4 = 16\omega^4(V^4 - g^2R^2) > 0,$$

이다. $V^2 > gR$이기 때문이다. 따라서 β^2의 서로 다른 실숫값이 두 개 있다. 두 값의 합 $4\omega^2V^2/g^2$과 곱 $4R^2\omega^4/g^2$이 모두 양수이므로, β^2의 두 값은 모두 양수이다. 각 $\beta = \omega T$는 양수이므로 β^2의 각 값은 정확히 하나의 β를 주고, 따라서 후보는 정확히 두 개 $\beta_1 < \beta_2$이다.

각 후보는 실제로 명중을 준다. 어느 근에 대해서든 두 수 $g\beta/(2V\omega)$와 $R\omega/(V\beta)$는 양수이고 (방정식에 의해) 그 제곱의 합이 1이므로, 이 두 수를 각각 사인과 코사인으로 갖는 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$가 존재한다. 이 앙각(elevation)으로, 표적이 β만큼 회전한 뒤 도달할 점을 지나는 연직 평면에서 발사하면 비행 시간은 β/ω, 사정거리는 R이 되므로 포탄은 표적과 만난다. 따라서 β의 가능한 값은 정확히 두 개이다. (이 두 값은 사정거리 R을 주는 서로 여각(complementary angle)인 두 앙각 α와 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$에 대응한다.)

소문항 3: 거리 P_1P_2



두 탄착점은 모두 원 위에 있으며, 발사 순간 표적의 위치로부터 시계 반대 방향으로 잰 각이 각각 β_1과 β_2이다. 따라서 각 P_1OP_2는 $\beta_2-\beta_1$이고 (필요하면 2π를 법으로 줄이는데, 이는 현에 영향을 주지 않는다), 이등변삼각형(isosceles triangle) OP_1P_2로부터

$$P_1P_2 = 2R\left|\sin\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\right|.$$

를 얻는다. β^2에 대한 이차방정식으로부터

$$\beta_1^2+\beta_2^2 = \frac{4\omega^2V^2}{g^2}, \qquad \beta_1^2\beta_2^2 = \frac{4R^2\omega^4}{g^2},$$

이고, $\beta_1,\beta_2>0$이므로 양의 제곱근을 취할 수 있다: $\beta_1\beta_2 = 2R\omega^2/g$. 따라서

$$\begin{aligned}(\beta_2-\beta_1)^2 &= \beta_1^2+\beta_2^2-2\beta_1\beta_2\\ &= \frac{4\omega^2V^2}{g^2}-\frac{4R\omega^2}{g} = \frac{4\omega^2}{g^2}(V^2-Rg),\end{aligned}$$

이므로 $\beta_2-\beta_1 = \dfrac{2\omega}{g}\sqrt{V^2-Rg}$이다. 그러므로

$$P_1P_2 = 2R\sin\left(\frac{\omega}{g}\sqrt{V^2-Rg}\right),$$

이고, 이것이 보이려던 것이다. (엄밀히 말하면 이를 위해서는 사인값이 음이 아니어야, 즉 $\frac{\omega}{g}\sqrt{V^2-Rg}\le\pi$여야 한다. 그렇지 않으면 거리는 이 식의 절댓값이다.)

검산

- $V^2\to gR^+$이면 두 앙각이 모두 45°로 가까워지므로 P_1과 P_2는 하나로 합쳐져야 한다. 실제로 공식은 0으로 수렴한다.

- $\beta_1\beta_2 = 2R\omega^2/g$를 직접 확인하자: $\beta_1\beta_2 = (2V\omega/g)^2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$이고, $\alpha_2 = \frac{1}{2}\pi - \alpha_1$이므로 이는 $(2V\omega/g)^2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 = (4V^2\omega^2/g^2)(gR/2V^2)$가 되어 예상과 일치한다.
- 수치적으로, $g = 9.8$, $R = 10$, $V = 14$, $\omega = 0.3$ (SI 단위)으로 두 궤적을 단계별로 계산하면 현의 길이가 약 5.97 m로 나와, $20\sin\left(0.3\sqrt{98}/9.8\right) \approx 5.969$와 일치한다.

흔한 실수

- 포를 어떤 연직 평면으로든 조준할 수 있다는 사실을 잊는 것. 첫 번째 부분은 사정거리만의 문제이지, 표적이 마침 어디에 있는지의 문제가 아니다.
- $\beta_1\beta_2$가 왜 양수인지 밝히지 않고 $\beta_1^2\beta_2^2$의 제곱근을 취하는 것.
- $P_1P_2 = R(\beta_2 - \beta_1)$이라고 쓰는 것. 이는 직선거리가 아니라 호의 길이(arc length)이다.

STEP 너머

움직이는 표적을 맞히는 것은 작은 **추적**(*pursuit*) 또는 **요격**(*interception*) 문제이다. 먼저 명중 시각을 구하고, 그다음에 조준 방향을 구한다. 두 방정식에서 매개변수를 소거하여 다항식을 얻은 뒤, 그 다항식을 풀지 않고 계수로부터 필요한 정보를 읽어 내는 것은 대학에서 끊임없이 쓰게 될 기법이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 회전 운동을 이처럼 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.