풀이

STEP II 1999, 문제 10

역학 • 연속 충돌

> **STEP II 1999, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q10

핵심 아이디어

이 사슬에서 일어나는 충돌은 모두 같은 모양이다. 질량이 μ이고 속력 u로 움직이는 입자가 정지해 있는 질량 $q\mu$의 입자와 충돌한다. 따라서 첫 번째 충돌의 계산을 비율만 맞추어 적용하면 **모든** 충돌을 설명할 수 있다. 각 입자의 최종 속도를 알고 나면, 추가 충돌이 일어나는지의 문제는 이웃한 입자들의 최종 속도를 비교하는 문제로 바뀐다. 또 $q = e$이면 속도가 매우 간단해져서 에너지 손실이 등비급수(geometric series) 하나로 정리된다.

풀이

첫 번째 충돌

입자들을 직선 위를 움직이는 질점(point mass)으로 모형화하고, P_1에서 P_2를 향하는 방향을 양의 방향으로 잡는다. 충돌 직후 P_1과 P_2의 속도를 각각 v_1, v_2라 하자. 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 의해

$$\begin{aligned} mV &= mv_1 + qm\,v_2, \\ v_2 - v_1 &= eV. \end{aligned}$$

이다. 첫 번째 식에 $v_2 = v_1 + eV$를 대입하면 $V = v_1 + qv_1 + qeV$이므로

$$v_1 = \left(\frac{1-eq}{1+q}\right)V, \qquad v_2 = v_1 + eV = \frac{1-eq+e+eq}{1+q}\,V = \left(\frac{1+e}{1+q}\right)V,$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다.

모든 충돌은 같은 꼴이다

다음과 같이 놓자.

$$\alpha = \frac{1-eq}{1+q}, \qquad \beta = \frac{1+e}{1+q}.$$

위의 계산에서는 m의 실제 값을 전혀 사용하지 않았다. 즉 질량이 μ이고 속도 u로 움직이는 입자가 정지해 있는 질량 $q\mu$의 입자와 충돌하면, 충돌한 입자는 속도 αu로 움직이고 상대 입자는 속도 βu로 튕겨 나간다. 각 P_{k+1}의 질량은 P_k의 질량의 q배이므로, 이 결과는 P_{k+1}이 아직 정지해 있는 한 P_k가 P_{k+1}에 충돌하는 경우에 그대로 적용된다.

$q \le e$일 때 정확히 $N-1$번의 충돌

$q \le e$라고 가정하자. 그러면 $eq \le e^2 < 1$이므로 $\alpha > 0$이고, 또한 $\beta > 0$이다.

사슬을 따라가 보자. P_1이 P_2와 충돌하면 P_1의 속도는 αV, P_2의 속도는 βV가 된다. $\beta V > 0$이므로 P_2는 정지해 있는 P_3 쪽으로 움직여 충돌하고, 그 결과 P_2의 속도는 $\alpha\beta V$, P_3의 속도는 $\beta^2 V$가 된다. 이를 계속하면 P_k는 속도 $u_k = \beta^{k-1}V > 0$으로 정지해 있는 P_{k+1}에 도달하므로, 이웃한 각 쌍 사이에서 충돌이 한 번씩 일어난다. 즉 충돌은 적어도 $N-1$번 일어난다. 이 충돌들이 끝난 뒤의 속도는

$$w_k = \alpha\beta^{k-1}V \quad (1 \le k \le N-1), \qquad w_N = \beta^{N-1}V.$$

이다. 이 값들은 모두 양수이므로 모든 입자가 같은 방향으로 움직인다.

? **생각해 보기** P_k가 다시는 P_{k+1}을 따라잡지 못한다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

두 입자가 충돌한 뒤 P_k는 그 이후로 일정한 속도 w_k로 움직인다. 이후에 P_k가 접촉할 수 있는 입자는 P_{k+1} 또는 P_{k-1}뿐이기 때문이다. 한편 P_{k+1}은 P_{k+2}와 충돌할 때까지는 $u_{k+1} = \beta^k V$로, 그 이후에는 w_{k+1}로 움직인다($k+1 = N$이면 계속 같은 속도로 움직인다). P_k와 P_{k+1} 사이의 간격은 P_k가 더 빠르게 움직일 때에만 줄어들 수 있는데,

- $u_{k+1} > w_k$이다. $\beta^k V > \alpha\beta^{k-1}V$는 $\beta > \alpha$, 즉 $1+e > 1-eq$와 동치이고, 이것은 참이기 때문이다.
- $k \le N-2$이면 $w_{k+1} \ge w_k$이다. $w_{k+1}/w_k = \beta = \dfrac{1+e}{1+q} \ge 1$인데, 이것이 성립하는 이유가 바로 $q \le e$이기 때문이다.
- $k = N-1$이면 $w_N > w_{N-1}$이다. $w_N/w_{N-1} = \beta/\alpha > 1$이기 때문이다.

따라서 충돌 후 P_{k+1}은 결코 P_k보다 느리지 않으며, 둘 사이의 간격은 절대 줄어들지 않는다. ($q = e$이면 $w_{k+1} = w_k$이다. 이때 간격은 일정하게 유지될 뿐 줄어들지는 않는다.) 이는 이웃한 모든 쌍에 대해 성립하므로 더 이상의 충돌은 일어나지 않고, 충돌은 **정확히** $N-1$번 일어난다.

바로 이 부분에서 $q \le e$라는 조건이 중요하다. 만약 $q > e$이면 $\beta < 1$이 되어 각 입자가 결국 뒤따르는 입자보다 느려지고, 사슬이 스스로를 따라잡으면서 더 많은 충돌이 일어난다.

$q = e$일 때 잃는 운동 에너지

이제 $q = e$이므로

$$\beta = \frac{1+e}{1+e} = 1, \qquad \alpha = \frac{1-e^2}{1+e} = 1-e.$$

이다. 모든 입자는 속력 V로 충돌을 받고, 그 뒤 $P_1, \dots, P_{N-1}$은 $(1-e)V$로, P_N은 V로 움직인다. P_k의 질량이 $e^{k-1}m$이므로 최종 운동 에너지(kinetic energy)는

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^{N-1} \tfrac{1}{2} e^{k-1} m (1-e)^2 V^2 + \tfrac{1}{2} e^{N-1} m V^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e)^2 \cdot \frac{1-e^{N-1}}{1-e} + e^{N-1} \right] \\ &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e)(1-e^{N-1}) + e^{N-1} \right], \end{aligned}$$

이다. 여기서 등비급수의 합 $1 + e + \cdots + e^{N-2} = \dfrac{1-e^{N-1}}{1-e}$를 이용하였다. 처음 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mV^2$이므로 손실은

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} m V^2 - T &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e^{N-1}) - (1-e)(1-e^{N-1}) \right] \\ &= \tfrac{1}{2} m e \left(1 - e^{N-1} \right) V^2, \end{aligned}$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

검산

- **충돌 하나씩 따져 보기.** $q = e$일 때 P_k가 P_{k+1}에 충돌하면 P_k의 속도는 V에서 $(1-e)V$로, P_{k+1}의 속도는 0에서 V로 바뀌고, 이때 잃는 에너지는 $\frac{1}{2}e^{k-1}mV^2\left[1-(1-e)^2-e\right] = \frac{1}{2}m(1-e)e^kV^2$이다. 이를 $k = 1, \dots, N-1$에 대해 더하면 $\frac{1}{2}m(1-e)V^2 \cdot e\,\dfrac{1-e^{N-1}}{1-e}$이 되어 같은 답을 얻는다.
- **극한.** $e \to 0$이면 손실은 0으로 수렴하는데, 실제로 $q = e \to 0$이면 뒤쪽 입자들의 질량은 무시할 수 있을 만큼 작아진다. $N = 2$이면 공식은 $\frac{1}{2}me(1-e)V^2$을 주며, 이는 충돌 한 번을 직접 계산한 결과와 일치한다.
- **수치 계산.** 무작위로 고른 $N \le 12$, 무작위 간격, 무작위 $q \le e$에 대해 사건 단위로 운동을 시뮬레이션해 보았더니 항상 정확히 $N-1$번의 충돌이 나왔다. $N = 5$, $q = e = \frac{1}{2}$, $m = V = 1$일 때 시뮬레이션으로 얻은 손실은 $0.234375 = \frac{15}{64}$로, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{16}\right)$과 일치하였다.

흔한 실수

- 처음 $N-1$번의 충돌이 일어난다는 것만 확인하는 것. "정확히"라고 하려면 나중에 어떤 입자도 앞의 입자를 따라잡지 못한다는 논증도 필요하다.
- P_k의 최종 속도를, P_{k+2}와 충돌하여 느려진 뒤의 최종 속도가 아니라 둘이 충돌한 **직후**의 P_{k+1}의 속도(βu_k)와 비교하는 것.
- 반발 법칙에서 부호를 틀리는 것. 접근 속력(speed of approach)의 e배와 같은 것은 분리 속력(speed of separation) $v_2 - v_1$이다.

STEP 너머

운동량을 한 번에 하나씩 다음 입자로 전달하는 질량들의 사슬은 입상 물질(granular material) 속을 지나가는 충격파(shock)의 1차원 모형이다. $q < 1$일 때의 이 사슬처럼 질량이 꾸준히 감소하는 사슬은 충격을 분산시키고 흡수하는 방법으로서 물리학자들이 연구하고 있다. 에너지 계산을 깔끔하게 재구성하는 좋은 방법은 **환산 질량**(*reduced mass*) $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$를 이용하는 것이다. 충돌 한 번에서 잃는 에너지는 $\frac{1}{2}\mu(1-e^2)w^2$이며, 여기서 w는 접근 속력이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 충돌을 다루는데, 그 좌표계에서는 이런 결과가 한눈에 드러난다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.