풀이

STEP II 1999, 문제 1

순수수학 • 큰 수의 비교

> **STEP II 1999, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q1

핵심 아이디어

이 수들은 직접 비교하기에는 너무나 크고, 그 로그(logarithm)조차도 여전히 너무 크다. 실마리는 $\log_{10}$을 **두 번** 취하는 것이다. x, y, z가 각각 10의 거듭제곱이므로, 이중 로그는 모두 100, x, y의 짧은 합이 되고, 이들은 쉽게 비교할 수 있다. $\log_{10}$은 증가함수(increasing function)이므로, 이중 로그를 비교하면 원래 수들을 비교한 것이 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\log_{10}$을 log로 쓰고,

$$L(a) = \log(\log a)$$

로 둔다. 함수 $t \mapsto \log t$는 순증가(strictly increasing)하므로, 수 $a, b > 10$에 대하여 (이때 $\log a, \log b > 1 > 0$이다) $a < b$일 필요충분조건은 $L(a) < L(b)$이다. 사용할 기본 사실은 다음과 같다.

$$\log x = 100, \qquad \log y = x = 10^{100}, \qquad \log z = y = 10^x.$$

소문항 (i)

$n = x$일 때 스털링(Stirling) 근사의 양변에 $\log_{10}$을 취하면

$$\begin{aligned}\log a_1 &\approx \log\sqrt{2\pi} + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\log x - x\log \mathrm{e} \\ &= 100x - x\log \mathrm{e} + 50 + \log\sqrt{2\pi} \\ &= x\,(100 - \log \mathrm{e}) + 50.4\ldots.\end{aligned}$$

이다. 이제 $\log \mathrm{e} \approx 0.434$이고, 상수 $50.4\ldots$는 $x = 10^{100}$에 비하면 완전히 무시할 수 있다. 따라서

$$\log a_1 \approx 99.566 \times 10^{100}, \qquad L(a_1) \approx 100 + \log 99.566 \approx 100 + 1.998 = 101.998\ldots \approx 102,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

각 수에 대하여 $\log a_i$를 구하고, 이어서 $L(a_i)$를 구한다.

- $a_2 = x^y$: $\log a_2 = y \log x = 100y$이므로 $L(a_2) = 2 + \log y = x + 2$이다.
- $a_3 = y^x$: $\log a_3 = x \log y = x^2 = 10^{200}$이므로 $L(a_3) = 200$이다.
- $a_4 = z^x$: $\log a_4 = x \log z = xy$이므로 $L(a_4) = \log x + \log y = x + 100$이다.
- $a_5 = \mathrm{e}^{xyz}$: $\log a_5 = xyz \log \mathrm{e}$이므로

$$L(a_5) = 100 + x + y + \log(\log \mathrm{e}) \approx y + x + 99.64,$$

  이다. 여기서 $\log(\log \mathrm{e}) = \log 0.434\ldots \approx -0.36$이기 때문이다.
- $a_6 = z^{1/y}$: $\log a_6 = \frac{1}{y} \log z = 1$이므로 정확히 $a_6 = 10$이다.
- $a_7 = y^{z/x}$: $\log a_7 = \frac{z}{x} \log y = \frac{z}{x} \cdot x = z$이므로 $L(a_7) = \log z = y$이다.

소문항 (i)에서 얻은 $L(a_1) \approx 102$와 함께 이중 로그를 나열하면 다음과 같다.

$$\underbrace{0}_{a_6}, \quad \underbrace{102}_{a_1}, \quad \underbrace{200}_{a_3}, \quad \underbrace{x+2}_{a_2}, \quad \underbrace{x+100}_{a_4}, \quad \underbrace{y}_{a_7}, \quad \underbrace{y+x+99.6}_{a_5}.$$

생각해 보기 소문항 (i)은 a_1의 근삿값만 준다. 그것으로 순서를 정하기에 충분할까?

충분하며, 스털링 근사조차 필요하지 않다. $x!$의 x개의 인수는 각각 x 이하이므로 $x! \le x^x$이고 $\log a_1 \le x \log x = 10^{102}$이다. 따라서 $L(a_1) \le 102 < 200 = L(a_3)$이다. 또 $a_1 = x! > 10 = a_6$임은 자명하다. 그러므로 엄밀하게 $a_6 < a_1 < a_3$이다.

이제 나머지 비교를 하나씩 정당화한다.

- $a_3 < a_2$: $200 < 10^{100} + 2$이다.
- $a_2 < a_4$: $x + 2 < x + 100$이다.
- $a_4 < a_7$: $x + 100 < y = 10^x$임을 보여야 한다. 이는 엄청난 차이로 성립하는데, 모든 $t \ge 3$에 대하여 $10^t > t + 100$이고 여기서 $t = x = 10^{100}$이기 때문이다.

- $a_7 < a_5$: $x + 99.6 > 0$이므로 $y < y + x + 99.6$이다. (직접 보이면: $\log a_5 = z \cdot xy \log \mathrm{e}$이고 $xy \log \mathrm{e} > 1$이므로 $\log a_5 > z = \log a_7$이다.)

a_6을 제외한 모든 수는 10보다 크므로 L의 단조성(monotonicity)을 적용할 수 있고, 크기 순서는 다음과 같다.

$$a_6 < a_1 < a_3 < a_2 < a_4 < a_7 < a_5.$$

검산

소문항 (i)에 대해서는 $n = 10^2, 10^3, 10^5, 10^8$일 때 스털링 공식을 (로그 감마 함수(log-gamma function)로 구한) 정확한 $\log_{10} n!$과 비교하였다. a_1에 대한 이중 로그 공식은 10^{-6} 이내로 일치하며, $n = 10^{100}$일 때는 101.998을 준다. 소문항 (ii)에 대해서는 $k = 2, 3, 4$에 대하여 $x = 10^k$로 두고 전체 계산을 반복하였는데, 이 경우 $y = 10^x$를 정수로 정확히 다룰 수 있다. 매번 같은 순서 $a_6 < a_1 < a_3 < a_2 < a_4 < a_7 < a_5$가 나오므로, 이 결과는 100이라는 수의 크기에 좌우되지 않는다.

흔한 실수

- 로그를 한 번만 취해 비교하다가 길을 잃는 것: $\log a_7 = z$와 $\log a_4 = xy$는 여전히 눈으로 비교하기에는 너무 크다. 로그를 한 번 더 취하라.
- e^{xyz}를 밑 10으로 바꿀 때 인수 $\log \mathrm{e}$를 빠뜨리는 것. 여기서는 거의 영향이 없지만, $L(a_5)$를 약 0.36만큼 바꾸기는 한다.
- a_6이 단순히 10으로, 모든 수 가운데 가장 작다는 것을 놓치는 것.

STEP 너머

반복 로그(iterated logarithm)와 지수 탑(tower of exponents)은 해석학과 컴퓨터 과학에서 증가 속도를 재는 도구이다. 예를 들어 반복 로그 $\log^* n$은 몇몇 알고리즘의 실행 시간에 나타나며, "탑" 함수는 램지 이론(Ramsey theory)의 결과들을 위에서 누른다. 스털링 공식 자체는 점근 급수(asymptotic series)의 첫째 항이며, 이를 꼼꼼히 증명하는 것은 대학 1학년 해석학의 고전적인 연습 문제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 여기에 쓰이는 극한과 부등식에 익숙해지기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.