풀이

STEP I 1999, 문제 9

역학 • 등속 운동학

STEP I 1999, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

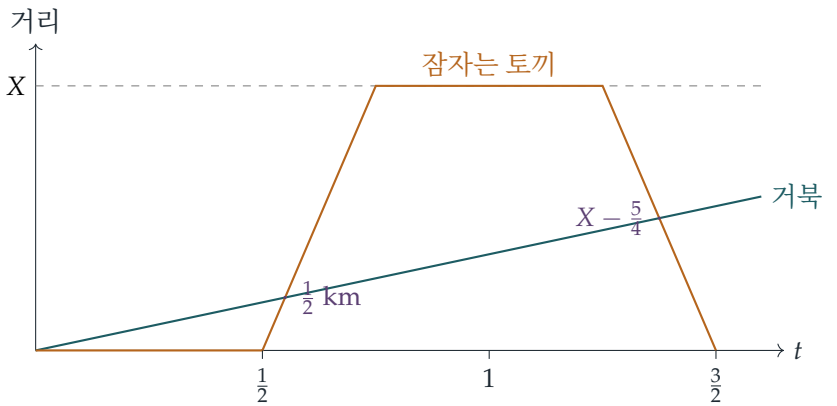
step.maths.org/questions/99-s1-q9

핵심 아이디어

모든 움직임이 일정한 속력으로 일어나므로, 모든 이동 시간은 단순히 거리를 속력으로 나눈 값이다. 두 동물이 만날 때마다 둘은 같은 순간에 같은 장소에 있으므로, 각각에 대해 시계의 시각을 적고 두 값을 같다고 놓는다. 두 번의 만남에서 v와 V에 대한 두 개의 방정식을 얻는다. $1/v$와 $1/V$(킬로미터당 시간)로 다루면 방정식이 일차(linear)로 유지된다.

풀이

두 동물 모두 같은 직선 경로를 따라 일정한 속력(constant speed)으로 움직인다고 모형화하고, 방향을 바꾸는 데 걸리는 시간은 무시한다. 시간 t는 출발 시점부터 시간 단위로 잰다. 거리–시간 그래프(distance–time sketch)(마지막에 구한 X의 값으로 그렸다)에 우리가 이용하는 두 교차점이 나타나 있다.



첫 번째 만남

거북은 출발점에서 $\frac{1}{2}$ km 떨어진 지점에 시각 $\dfrac{1/2}{v}$에 도착한다. 토끼는 $t = \frac{1}{2}$에 출발하여 같은 지점에 시각 $\frac{1}{2} + \dfrac{1/2}{V}$에 도착한다. 둘은 그곳에 함께 있으므로

$$\frac{1}{2v} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2V}, \qquad \text{즉} \qquad \frac{1}{v} = 1 + \frac{1}{V}. \tag{1}$$

두 번째 만남

토끼는 채소밭에 시각 $\frac{1}{2} + \dfrac{X}{V}$에 도착하고, 30분 동안 잠을 잔 뒤 $1 + \dfrac{X}{V}$에 떠난다. 그다음 $\frac{5}{4}$ km를 되돌아 달리므로, 토끼가 거북을 만나는 시각은

$$1 + \frac{X}{V} + \frac{5}{4V} = 1 + \frac{X + \frac{5}{4}}{V}.$$

이다. 거북은 아직 가는 길 위에 있으며 출발점에서 $X - \frac{5}{4}$ km 떨어져 있으므로, 거북은 $\dfrac{X - \frac{5}{4}}{v}$시간 동안 걸어온 것이다. 두 시각을 같다고 놓으면

$$\frac{X - \frac{5}{4}}{v} = 1 + \frac{X + \frac{5}{4}}{V}. \tag{2}$$

생각해 보기 방정식 두 개와 미지수 두 개가 있지만, (2)에서는 $1/v$에 X가 곱해져 있다. 어떻게 하면 V만 따로 구할 수 있을까?

(1)을 (2)에 대입한다. 그러면 X/V 항들이 소거되며, 바로 이 덕분에 V가 깔끔하게 구해진다.

$$\begin{aligned}
\left(X - \tfrac{5}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{V}\right) &= 1 + \frac{X + \frac{5}{4}}{V} \\
X - \tfrac{5}{4} + \frac{X - \frac{5}{4}}{V} &= 1 + \frac{X + \frac{5}{4}}{V} \\
X - \tfrac{9}{4} &= \frac{5/2}{V}.
\end{aligned}$$

따라서

$$V = \frac{5/2}{X - \frac{9}{4}} = \frac{10}{4X - 9},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (이것이 양의 속력이 되려면 $X > \frac{9}{4}$이어야 하며, 이 점을 마지막 부분을 위해 기억해 둔다.)

그러면 (1)로부터

$$\frac{1}{v} = 1 + \frac{4X - 9}{10} = \frac{4X + 1}{10}, \qquad \text{따라서} \qquad v = \frac{10}{4X + 1}.$$

X 구하기

토끼는 채소밭을 $1+\dfrac{X}{V}$에 떠나 집까지 다시 $\dfrac{X}{V}$시간이 걸리므로, $1+\dfrac{2X}{V}$에 경주를 마친다. 이것을 $\frac{3}{2}$와 같다고 놓으면 $\dfrac{2X}{V}=\frac{1}{2}$이므로 $V=4X$이다. 그러므로

$$\begin{aligned} 4X &= \frac{10}{4X-9} \\ 16X^2-36X-10&=0 \\ 8X^2-18X-5&=0 \\ (2X-5)(4X+1)&=0. \end{aligned}$$

근 $X=-\frac{1}{4}$는 거리로서 불가능하므로(게다가 $X>\frac{9}{4}$이어야 한다)

$$X=\tfrac{5}{2}\text{ km}.$$

이 값에서 토끼의 속력은 $V=10\,\text{km/h}$이고 거북의 속력은 $v=\frac{10}{11}\,\text{km/h}$이다.

검산

$X=\frac{5}{2}$, $V=10$, $v=\frac{10}{11}$을 이야기에 다시 넣어 보자. 거북은 $t=0.55$에 $\frac{1}{2}\,\text{km}$ 지점에 도착하고, $t=0.5$에 출발한 토끼는 그곳까지 $0.05\,\text{h}$가 걸리므로 둘은 만난다. 토끼는 $t=0.75$에 채소밭에 도착하여 $t=1.25$에 떠난다. 토끼는 $t=1.375$에 채소밭에서 $1.25\,\text{km}$ 떨어진 지점(출발점에서도 $1.25\,\text{km}$ 떨어진 지점)에 도착하고, 거북은 $1.25\times1.1=1.375$에 $1.25\,\text{km}$ 지점에 도착하므로 둘은 다시 만난다. 토끼는 $1.25+0.25=1.5$에 집에 도착한다. $X>\frac{9}{4}$인 임의의 값을 V와 v의 공식에 대입하여 경주를 다시 재현해 보아도 정확히 올바른 지점에서 만난다.

흔한 실수

- 토끼의 시각을 적을 때 토끼의 30분 낮잠 중 하나, 특히 채소밭에서의 낮잠을 빠뜨린다.
- 두 번째 만남 지점을 채소밭이 아니라 **출발점**에서 $\frac{5}{4}\,\text{km}$ 떨어진 곳으로 잡는다.
- 이차방정식(quadratic)의 두 근을 모두 남겨 둔다. 음의 거리는 이유를 밝혀 버려야 한다.

STEP 너머

위와 같은 거리–시간 그래프는 문장제를 직선들이 어디에서 교차하는가에 대한 문제로 바꾸어 주며, 이는 모든 역학(mechanics) 강의에서 운동학(kinematics)의 출발점이다. 여

기서는 속력의 역수(reciprocal)(페이스(*pace*))를 이용하여 방정식을 일차로 만들었다. 문제를 선형화하는 변수를 고르는 것은 응용수학 전반에 걸쳐 거듭 등장하는 기법이다. 이러한 아이디어에서 발전하는 운동에 대한 대학 1학년 수준의 내용을 보려면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.